

MATEMATIKA

ŠKOLSKI LEKSIKON

ŠKOLSKI LEKSIKON

Općeobrazovne škole

12 knjiga

Glavni urednik
SILVIO RUŽIĆ

Urednik izdanja
MIRA ZAGOTTA

Stručni urednici
Prof. HRVOJE JURAČIĆ
Prof. DANKO GRLIĆ

Autori

BABIĆ dr Stjepan
BAUČIĆ prof. Ivo
BAUČIĆ prof. Vlatka
BRAJEVIĆ prof. Dora
ČUBELIĆ dr Tvrtko
ČUDINA prof. Mira
DAMJANOV dr Jadranka
DOMAC dr Radovan
GRLIĆ prof. Danko
GRLIĆ dr Ljubiša
LISINSKI Hrvoje
LIŠČIĆ prof. Berislav
MANASTERIOTTI prof. Višnja
MARTIĆ prof. Mirko
MARUŠIĆ prof. Ante
MATKOVIĆ prof. Hrvoje
OBRADOVIĆ prof. Josip
RADULIĆ prof. Ksenija
SALZER prof. Olga
SEUNIK prof. Vera
SEVDIĆ prof. Milenko
VELIMIROVIĆ Mihajlo

i suradnici

Stručni redaktori i recenzenti

ANTIĆ prof. Barka
CRKVENČIĆ dr Ivan
FIJALDIĆ dr inž. Mirko
FINKA dr Božidar
FURLAN dr Martin
GROSS dr Mirjana
HANŽEKOVIĆ Fedor
KRAJNOVIĆ prof. Milan
KUNTARIĆ prof. Marija
LOVRENČIĆ dr Rene
LUI dr Ante
MIKECIN prof. Vjekoslav
NOVAKOVIĆ prof. Novak
PEJOVIĆ dr Danilo
PETROVIĆ dr Sveto
PRELOG dr Milan

Oprema
ĐURO SEDER

PROF. MILENKO SEVDIĆ

MATEMATIKA



»PANORAMA«

ZAGREB, 1965.

OD IZDAVAČA UZ DRUGO IZDANJE

Drugo izdanje »Školskog leksikona« razlikuje se od prvog osim po grafičko-likovnoj opremi i opsegu, također po mnogim svojim sadržajnim karakteristikama. Znatno veći broj autora i recenzenata pokušao je, na osnovu vlastitih kritičkih zapažanja kao i sugestija i prijedloga određenog broja drugih stručnjaka (npr. pismo Saveznog zavoda za ispitivanje školstva) izmijeniti i nadopuniti prvih dvanaest leksikona i ispraviti neke propuste i greške što su se potkrale u prvom izdanju.

Autori ovih knjiga svjesni su ne samo objektivnih teškoća, koje su izvanredno velike u takvoj vrsti posla, već i svojih subjektivnih mogućnosti pa stoga ne smatraju da je napor koji su uložili uvijek nužno urodio najboljim i najpozitivnijim rezultatima. Uza svu koncentraciju pažnje, savjest naučnih radnika i stručnu rigoroznost koja se može uložiti u takav rad, leksikoni ove vrste nikad, ni kod naroda koji imaju veliku tradiciju na tom području, ne mogu biti potpuno bez grešaka. I u njima će se nesumnjivo naći nedovoljno preciznih objašnjenja i propuštenih pojmova, pa i zapostavljanje pojedinih područja.

Smatrali smo, međutim, da ti leksikoni mogu ipak mnogo pomoći učeniku i našem čovjeku koji želi biti upućen u temeljne, ključne pojmove raznih znanstvenih područja, jer mu omogućuje relativno lako, brzo i jednostavno snalaženje u obimnoj materiji osnovnog obrazovanja. Kao tumači pojmova, ovi leksikoni mogu na određen način, kao pomoćna odnosno dopunska sredstva u nastavi, poslužiti upravo svojim specifičnim,

leksikografskim načinom informiranja. Takav leksikografski oblik upućivanja u pojedina područja prijeko je potreban suvremenom čovjeku u vijeku ubrzanog napretka svih posebnih znanosti, u epohi ekonomskih, društvenih i političkih promjena, znači i svakodnevnog pojavljivanja novih pojmova. No ovi leksikoni imaju skromnu namjeru da pruže samo prva uputstva, da budu sintetički pisani vodiči kroz pojedina područja, da ukažu na najbitnije karakteristike određenog pojma, a nikako da zamijene studiozan rad nastavnika na produbljivanju i usavršavanju znanja iz određenih predmeta. Oni nisu niti mogu biti zamjena udžbenicima koji sistematski i postupno uvode učenika u pojedine predmete, tumačeći građu bilo kronološkim redom, bilo od jednostavnijih do složenijih, teže shvatljivih pojmova. Iz njih učenik ne može učiti, ali mu oni mogu pružiti dragocjenu pomoć pri učenju, kad naiđe na nejasan termin, kad traži sažetu definiciju nekog pojma, kad mu je potreban određeni podatak, činjenica, godina, formula, broj stanovnika, kad ne zna kojem razdoblju pripada neka pojava ili umjetnički pravac, u koje vrijeme i unutar kojih idejnih strujanja da smjesti određenu književnu, socijalnu ili filozofsku koncepciju, koje su joj glavne karakteristike i predstavnici itd. Premda rađeni uglavnom na osnovu plana i programa naših općeobrazovnih škola, oni su kadikad morali i odstupiti od tih koncepata, jer tumače i moraju tumačiti i one termine koji se posebno ne obrađuju u školskoj nastavi.

U nizu objektivnih teškoća autora ovih leksikona, treba prije svega istaknuti neujednačenu terminologiju za pojedina područja. Ne treba zaboraviti, bez obzira na to što je opseg leksikona povećan u usporedbi sa prvim izdanjem, da se mnogim autorima pojavio gotovo nerješiv problem relativno vrlo skučenog prostora, što se posebno ispoljilo kod onih predmeta koji se više godina uče u školama.

Predgovor autora

Dijalektički principi izučavanja prirode i društva diktiraju izučavanje tih pojava ne toliko u njihovom momentanom presjeku, koliko u samom njihovom toku. Dijalektička metoda u prirodnim naukama postavlja pitanje ne samo o tome kakva je slika pojave u danom momentu nego ponajprije o tome kakav je opći tok pojave, što se u toj pojavi mijenja i kako se mijenja. Kako se zadatak prirodnih, tehničkih, ekonomskih pa i drugih nauka sastoji u tome da se otkrivaju i istražuju funkcionalne zavisnosti veličina koje dolaze u dotičnoj pojavi i procesu, to je matematika upravo stoga i postala neophodan a l a t, snažno i neprocjenjivo sredstvo egzaktnih nauka i tehnike kojim se sistematski proučavaju događaji u prirodi i društvu i promjenljive veličine u tehničkim procesima, jer se promjene u pojavama mjere i izražavaju b r o j e v i m a, osnovnim elementima matematike. Matematika je istom tada postala temeljem prirodnih, društvenih, ekonomskih nauka i tehnike kada su bili pronađeni sistematski postupci izučavanja p r o m j e n l j i v i h v e l i č i n a. Odatle slijedi da je osnovnim pojmom matematike postao pojam promjenljivih veličina, a s tim u vezi i pojam f u n k c i j e. Izučiti sistematski sve ono što se mijenja kod izvjesnih veličina s kojima se čovjek susreće, unijeti poredak, naći one opće zakonitosti kojima se potčinjavaju promjene ovog ili onog tipa, uvjetovane kauzalnošću, u tome se i sastoji u širokom planu shvaćena zadaća m a t e m a t i č k e a n a l i z e.

Tko danas hoće da prati modernu egzaktnu nauku i tehniku, mora dobro poznavati matematiku, i to ne samo elementarnu nego i višu. Današnji nivo tehničkih nauka traži od inženjera izučavanje onih dijelova fizike, mehanike, kemije, i dr., u kojima se primjenjuju tačne matematičke metode. Međutim, zbog unutrašnje strukture same matematike, zbog povezanosti njezinih dijelova potrebno

je i teoretsko fundiranje onih postupaka koji se primjenjuju u praksi. Praktičar mora razumijevati i jezik pomoćnih sredstava praktične primjene matematičkog izučavanja, mora znati koristiti različite tablice, grafičke metode, dijagrame različitih vrsta, itd. Praktičar mora znati od teorije uzeti upravo ono što mu je potrebno u praksi, ukratko: mora znati primijeniti u svome poslu matematiku i njene metode istraživanja.

U ovom svesku ŠKOLSKOG LEKSIKONA, koji se odnosi na MATEMATIKU, iznijeto je gradivo koje se obrađuje u školama I i II stupnja s nekim manjim proširenjima, te može korisno poslužiti pri ponavljanju i rekapitulaciji prijeđenog gradiva i kao podsjetnik da se osvježi zaboravljeno. Od običnog pregleda razlikuje se u tome što su pojmovi i pojedine partije poredani po abecedi (leksikografski).

Pri izradi ovog Leksikona matematike poslužili su mi prije svega naši udžbenici (novijeg i starijeg izdanja), zatim neki udžbenici na ruskom, njemačkom, francuskom i engleskom jeziku, neki pregledi srednjoškolske matematike i razni priručnici iz elementarne matematike, a i neki udžbenici više matematike, te napokon naši i neki strani leksikoni i enciklopedije.

AUTOR

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

U ovom izdanju izvršena su manja proširenja i neke dopune. Dodan je i veći broj slika. Uzete su u obzir i izvjesne napomene stručnog redaktora i recenzenta, te popravljene pogreške zapažene u prvom izdanju, kako u samom tekstu, tako i u nekim slikama.

AUTOR

PROF. MILENKO SEVDIĆ

MATEMATIKA

A

ADEND (PRIBROJNIK), v. Zbrajanje.

ADICIJA, v. Zbrajanje.

AHMESOVA RAČUNICA, najstarije sačuvano matematičko djelo, pisano hijeroglifima na papirosu. Čuva se u Londonu pod imenom *Rhindov papiros,* a napisao ga je *Ahmes* (oko 2 000. pr. n. e.), skupivši u njemu cjelokupno znanje starih Egipćana.

AKSIOM, osnovna polazna tvrdnja, neovisna o drugim tvrđenjima, te iz njih ne proizlazi. Do aksioma se dolazi iz neposrednog iskustva ili opće prakse. Aksiomi mogu biti sasvim geometrijskog sadržaja, npr.: dvjema tačkama u prostoru može se povući samo jedan pravac. No oni mogu biti i općenitijeg sadržaja, npr.: ako su dvije veličine jednake trećoj, onda su one i među sobom jednake. Iako aksiom često iskazuje tako očiglednu tvrdnju da je ne treba dokazivati, ipak očiglednost nije nešto što je nužno. Npr. *ekvivalent Euklidova aksioma,* da se tačkom izvan pravca može povući samo jedna

paralela, nije očigledan. Ako se umjesto njega uzme drugi aksiom koji mu je suprotan, on može da bude aksiom u jednom drugom sistemu aksioma u kome se može logički izgraditi nova geometrija, koja je u sebi neprotivurječna. Tako su nastale tzv. *neeuklidske geometrije.* Nauka o aksiomima zove se *aksiomatika.* Aksiomatska metoda je veoma značajna u matematici kao i u svim onim naukama u kojima je riječ o formalnom mišljenju. Ona omogućuje sitematizaciju neke teorije ili naučne discipline kao i egzaktno dokazivanje njihovih stavova. Valja naglasiti da je njezina ograničenost upravo u njenom formalnom karakteru. Teoremi izvedeni iz aksioma mogu biti samo formalno pravilni, a ne i objektivno istiniti.

»ALGEBARSKI« BROJEVI, brojevi s predznacima, tj. pozitivni i negativni. Prije su ih zvali *relativni brojevi.* Da se sazna kolika je neka veličina, valja izvršiti *mjerenje.* Rezultat mjerenja je broj — *mjerni broj.* U stvarnosti postoje veličine sa dva *suprotna smjera.* Za jedne se veličine kaže da su *pozitivne,* a druge *negativne.* Prve se označuju znakom (+) (plus), a druge znakom (—) (minus). Ti se znaci zovu *predznaci. Brojevni pravac »algebarskih« brojeva* je pravac s označenim početkom *0* (ishodištem) i tačkom udaljenom od njega za jedinicu, i na njega se nanose tačke nadesno od ishodišta koje odgovaraju pozitivnim, a nalijevo koje odgovaraju negativnim brojevima. I *nula* se uzima kao algebarski broj. Ona je rezultat računske operacije *oduzimanja,* ako su jednaki minuend i suptrahend. Apsolutna vrijednost pozitiv-

nog broja jest veličina samog broja, a apsolutna vrijednost negativnog broja jest suprotan pozitivan broj; oznaka: dvije uspravne crte. $|+5| = 5$ i $|-5| = 5$. *Napomena:* naziv je stavljen u navodnike radi razlikovanja od istog naziva za ne-transcendentne brojeve (v. Područja brojeva).

ALGEBARSKI IZRAZI, v. Opći brojevi.

ALGEBARSKI RAZLOMCI, v. Razlomci.

ALGEBRA, jedna od osnovnih grana matematike. Ime je dobila od početne riječi u naslovu djela *Al Gebr w'al mukvabalah*, arapskog matematičara *Alchvarizmija* (oko 820). Počeci današnje algebre naziru se već u grčkog matematičara *Diofanta* (kraj II st.). Prije su se algebarski problemi rješavali geometrijskim putem. Istom Francuz *Viète* (u XIII st.) uvodi simbole za opće brojeve i nepoznate veličine i pokazuje da se s njima mogu izvoditi sve računske operacije. Time je bio otvoren put za poopćenje, ali i za jednostavnije izražavanje mnogih pojmova. Pomoću algebre tada se rješavaju i najzamršeniji problemi. *Niža algebra* proučava operacije s *općim brojevima*, i jednostavnije *jednadžbe*, dok se *viša algebra* bavi daljom teorijom algebarskih jednadžbi. Tu igra važnu ulogu *osnovni stavak algebre*, naime: lijeva strana algebarske jednadžbe n-tog stepena

$$f(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

može se rastaviti u n **linearnih faktora**, tj.

$$f(x) \equiv a_0(x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_n) = 0$$

gdje su $x_1, x_2, \ldots x_n$ korijeni jednadžbe. Drugim riječima: svaka algebarska jednadžba n-tog stepena

ima *n* korijena. Prvi dokaz ovog teorema dao je *K. F. Gauss.*

ALGORITAM, skup simbola i metoda računanja s njima po izvjesnim ustanovljenim pravilima. Algoritam ne daje konačnu formulu, nego upućuje kako se računskim operacijama može doći do rezultata.

ALIKVOTNI DIO, svaki dio veličine, uzete kao jedinica, kad se razdijeli na više jednakih dijelova.

AMPLITUDA, riječ koja se općenito upotrebljava u više naučnih disciplina i s različitim značenjima. U matematici — najveći otklon vrijednosti neke veličine.

ANALITIČKA GEOMETRIJA (kraće ANALITIKA), istražuje geometrijske likove na osnovi njihovih definicija kao i njihova svojstva pomoću računa i analize, dakle *algebre.* Za analitiku je bitno važan *koordinatni sistem* (v. Grafičko predočivanje), koji omogućava da se geometrijski lik fiksira pomoću brojeva, odnosno jednadžbi. U analitici se geometrijskom liku daje jednadžba, i obrnuto, jednadžbi se daje geometrijska interpretacija u obliku geometrijskog lika. Prema tome da li se geom. lik nalazi u ravnini ili u prostoru, analitika se dijeli na: *analitiku u ravnini* i *analitiku u prostoru.* Kad su franc. matem. Viète i njegovi sljedbenici razvili algebru, a franc. matem. Descartes uveo u geometriju koordinatni sistem i analitičke metode, tada se razvila analitička geometrija u samostalnu disciplinu. Primjenom *infinitezimalnog računa* na analitičku geometriju razvila se *diferencijalna geometrija.*

Analitička geometrija u ravnini

Udaljenost dviju tačaka $(x_1; y_1)$ i $(x_2; y_2)$ dana je sa:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Površina trokuta. Ako su tri tačke $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ i $(x_3; y_3)$ vrhovi trokuta, onda je njegova površina dana sa:

$$P = \frac{1}{2}\left[x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)\right]$$

Indeksi koordinata smjenjuju se cikličkim redom.

Uvjet da tri tačke leže na istom pravcu dobiva se kao posljedica iz $P = 0$, tj.

$$x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) = 0$$

Dijeljenje dužine u omjeru k. Ako dužinu koja spaja tačke $(x_1; y_1)$ i $(x_2; y_2)$ dijeli treća tačka u odsječke mjerene od te tačke do drugih dviju tačaka, tako da je omjer tih odsječaka jednak k, onda su koordinate tog djelišta:

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k}$$

Za $k = -1$: $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ (koordinate polovišta).

Napomena: daljnja analitička obrada likova u ravnini: v. Pravac; Kružnica u analitici; Elipsa; Hiperbola; Parabola; Krivulja.

Analitička geometrija u prostoru.

Udaljenost dviju tačaka (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2):

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

Ravnina. Svaka jednadžba prvog stepena sa tri varijable jeste jednadžba ravnine.

Opći oblik: $Ax + By + Cz + D = 0$

Segmentni oblik: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, gdje su a, b, c odsječci na koordinatnim osima.

Normalni oblik: $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0$, gdje je p udaljenost ishodišta od ravnine, a α, β i γ kutovi nagiba normale prema osima.

Opći oblik $Ax + By + Cz + D = 0$ može se svesti na normalni ovako:

$$\frac{Ax + By + Cz + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = 0$$

Udaljenost (d) tačke (x_0, y_0, z_0) od ravnine dobije se ovako:

$$d = x_0 \cos \alpha + y_0 \cos \beta + z_0 \cos \gamma - p = \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Pravac u prostoru, kao presjek dviju ravnina, predočen je sistemom dvije linearne jednadžbe sa tri varijable

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

ili: $y = ax + b$, $z = cx + d$

Jednadžba kugle (kugline plohe):

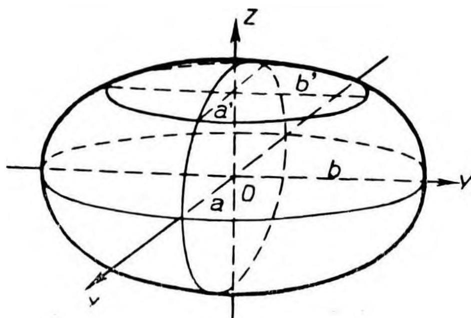
opći oblik: $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - r^2 = 0$, gdje su a, b i c koordinate središta, a r je polumjer;

središnji oblik: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, dobije se kao posljedica, ako je $a = b = c = 0$.

Plohe drugog stepena. Jednadžba drugog stepena sa tri varijable: $F(x, y, z) \equiv a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7x + a_8y + a_9z + a_{10} = 0$ predočuje općenito plohu, koja se zove *ploha drugog stepena* ili *kvadrika.*

Neke specijalne plohe drugog stepena:

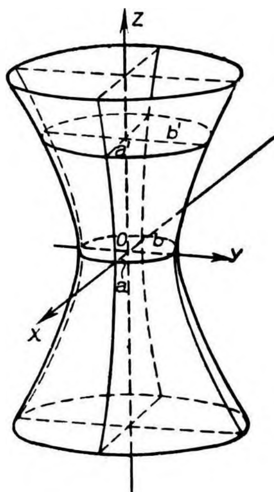
Elipsoid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, gdje su a, b i c međusobno okomite poluosi (sl. 1). Ako su dvije osi



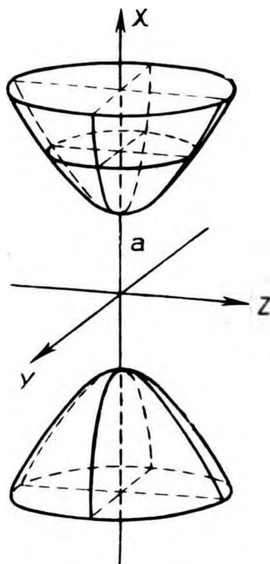
Sl. 1

jednake, elipsoid se zove *rotacioni,* i to *spljošteni,* ako je $a > c$, a *produženi,* ako je $a < c$.

Jednoplohi hiperboloid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (sl. 2).



Sl. 2

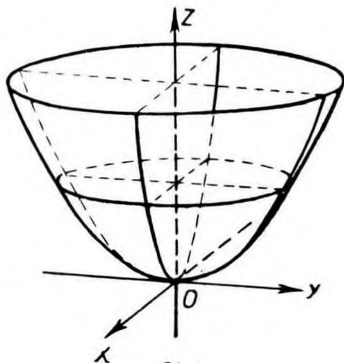


Sl. 3

Dvoplohi hiperboloid: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (sl. 3).

Eliptički paraboloid: $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \; (p > 0, \; q > 0)$,

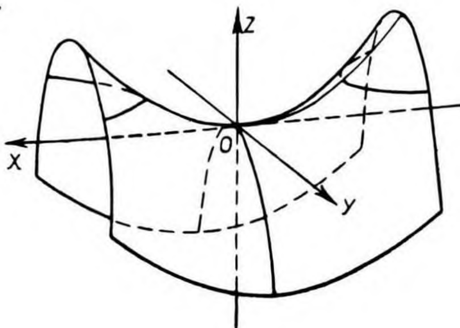
(sl. 4).



Sl. 4

Hiperbolički paraboloid: $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \; (p > 0, q > 0)$,

(sl. 5).



Sl. 5

Eliptički stožac: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, vrh u ishodištu, a os u osi z.

Eliptički valjak: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, os ima u osi z.

Hiperbolički valjak: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, os ima u osi z.

Parabolički valjak: $y^2 = 2px$, os ima u osi z.

Krivulje u prostoru.

Krivulja u prostoru može se definirati kao geometrijsko mjesto tačaka koje pripadaju istovremeno dvjema plohama (tada je u stvari krivulja presjek dviju ploha). Ako je općenito jednadžba jedne plohe $F(x, y, z) = 0$ i druge $G(x, y, z) = 0$, onda te dvije jednadžbe uzete zajedno predstavljaju jednadžbe krivulje u prostoru. Naprotiv, jednadžba $p \cdot F(x, y, z) + q \cdot G(x, y, z) = 0$, za ma koje vrijednosti p i q, predočuje različite plohe koje prolaze krivuljom određenom plohama $F = 0$ i $G = 0$. Ako se krivulja promatra kao trajektorija tačke koja se giba, tada se koordinate tačke mogu smatrati funkcijama neke pomoćne varijable (parametra), tada su te funkcije *parametarske jednadžbe krivulje*. Općenito: $x = \mathrm{x}(t)$, $y = \mathrm{y}(t)$, $z = \mathrm{z}(t)$.

ANALITIKA, kraći naziv za analitičku geometriju.

ANALIZA, razlaganje, rastavljanje na sastavne dijelove neke cjeline. *Matematička analiza* u XVII

st. nije ništa drugo nego algebra sa svojim metodama rješavanja problema. Danas se pod matematičkom analizom razumijeva: *teorija realnih brojeva, teorija kompleksnih brojeva, teorija funkcija realnog argumenta* i *teorija funkcija kompleksnog argumenta.*

ANUITET, iznos kojim se u određenim vremenskim rokovima (godišnje, polugodišnje ili drugačije) otplaćuje dugoročni zajam. U anuitetu je sadržana otplata i kamati na ostatak duga.

APOLONIJ iz Perge (262—190. pr. n. e.), jedan od najznačajnijih matematičara stare Grčke. Najvažnije mu je djelo *Elementi konika* (u osam knjiga), u kojem je obradio osnovna svojstva konika. Od njega potječu i nazivi: elipsa, hiperbola i parabola, kao i pojmovi: dijametar, fokus, asimptota itd.

APOLONIJEV PROBLEM, konstruirati sve kružnice koje dodiruju tri zadane kružnice. Općenito se kao rješenje dobiva osam kružnica.

APOLONIJEVA KRUŽNICA, skup svih tačaka u ravnini za koje je omjer udaljenosti od dvije čvrste tačke A i B stalan, tj. $TA : TB = m : n$. Ako je $m = n$, Apolonijeva kružnica prelazi u simetralu dužine AB (v. Simetrija).

APROKSIMACIJA, određivanje približnih vrijednosti brojeva odnosno funkcija (v. Računanje s približnim vrijednostima).

APROKSIMATIVNE KRIVULJE, v. Krivulja.

APSCISA, v. Koordinatni sistem.

APSOLUTNA POGREŠKA, v. Računanje s približnim vrijednostima.

APSOLUTNA VRIJEDNOST, vrijednost *realnog* broja uzeta bez predznaka (v. »Algebarski« brojevi). $|-a| = |+a|$ čita se: apsolutna vrijednost realnog broja $(-a)$ jednaka je apsolutnoj vrijednosti realnog broja $(+a)$. Općenito je

$$|x| = x \text{ za svako } x \geqq 0$$
$$|x| = -x \text{ za svako } x < 0$$

Geometrijski: apsolutna vrijednost broja x znači udaljenost tačke od ishodišta na brojevnom pravcu. *Svojstva:* $|a + b| \leqq |a| + |b|$; $|a - b| \geqq |a| - |b|$; $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

Apsolutna vrijednost (ili modul) *kompleksnog* broja $a + bi$ piše se $|a + bi|$, a predočuje vrijednost $\sqrt{a^2 + b^2} \geqq 0$

ARAPSKE BROJKE, v. Sistemi brojeva.

ARCUS (č. arkus), naziv za luk kružnice, arc. x je simbol za duljinu luka kružnice polumjera $r = 1$ s pripadnim središnjim kutom x.

ARGUMENT, 1) dokaz, činjenica, razlog; 2) nezavisna promjenljiva veličina neke funkcije; 3) kut u polarnim koordinatama.

ARHIMED (287—212. pr. n. e.), najveći matematičar i fizičar staroga vijeka. Napisao je velik broj djela iz matematike, fizike, tehnike, od kojih se

malo sačuvalo. Najpoznatija su: *O kugli i valjku; O konoidima i sferoidima; O mjerenju kruga; O ravnoteži ravnih likova; O plivanju tjelesa.* Njegova su djela najviša dostignuća staroga vijeka na području *stereometrije.* Prvi je shvatio problem *kvadrature kruga* kao pitanje aproksimacije pomoću opisanih i upisanih mnogokuta u kružnicu. Njegov postupak sadrži u stvari prve početke *infinitezimalnog računa.* Odredio je broj π (pi) kao broj veći od $3\frac{10}{71}$, a manji od $3\frac{1}{7}$. Svojim djelom »O ravnoteži ravnih likova« osnovao je *statiku,* a djelom »O plivanju tjelesa« *hidrostatiku.* Bio je i plodan pronalazač.

ARHIMEDOV AKSIOM, aksiom koji kaže: ako su a i b prirodni brojevi uzeti po volji, ima uvijek cjelobrojni višekratnik $n \cdot a$ broja a, koji premašuje b, tj. $n \cdot a > b$. U geometrijskoj formulaciji dao ga je *Eudokso* (IV st. pr. n. e.).

ARHIMEDOVA SPIRALA, v. Krivulja.

ARITMETIČKA SREDINA, suma brojeva podijeljena brojem koliko je pribrojnika.

ARITMETIČKI IZRAZ, v. Brojevni izraz.

ARITMETIČKI NIZ, v. Niz.

ARITMETIČKI RAZLOMCI, v. Razlomci.

ARITMETIKA, nauka o brojevima, jedna od osnovnih grana matematike. Dijeli se na *posebnu* i

opću aritmetiku. Posebna aritmetika bavi se proučavanjem računskih operacija s posebnim brojevima, a opća aritmetika operacijama s općim brojevima. Aritmetika proučava osim četiri *osnovne operacije,* tj. zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja, još i *više operacije:* potenciranje, korjenovanje i logaritmiranje. Kada je uvedena nula i druge arapske znamenke, te pozicioni dekadski sistem, došlo se do današnjeg oblika pravila o računanju. Razvoju aritmetike, osim starih Grka, pridonijeli su Indijci i Arapi. U novom vijeku evropski matematičari razvili su aritmetiku do današnjeg stupnja. Iz težnje da se računske operacije višeg stepena svedu na računske operacije nižeg stepena, došlo se u XVII st. do otkrića logaritama. Aritmetika se danas primjenjuje u svim granama matematike.

ARKUS, v. Arcus.

ASIMPTOTA, pravac kome se neka krivulja sve više približava ali ga nikad ne dodirne. Drugim riječima: asimptota je tangenta krivulje u beskonačno dalekoj tački krivulje. Ima krivulja s jednom ili više asimptota, npr. *hiperbola* ima dvije asimptote.

B

BAZA, 1) potencije, logaritma; 2) brojevnog sistema; 3) osnovica trokuta i nekih četverokuta; 4) osnovka geometrijskih tijela.

BESKONAČAN RED, v. Redovi.

BESKONAČNO, jedan od najvažnijih pojmova matematičke analize. Ima dvojako značenje: 1) *beskonačno aktualno* je ono što je veće od svake dane veličine i ne može se izraziti nikakvim određenim brojem; 2) *beskonačno potencijalno* je ono što postaje beskonačno veliko ili beskonačno malo, već prema tome da li u nekom određenom procesu postaje veće od svake ma kako velike zadane veličine, ili postaje manje od svake ma kako malene zadane veličine. To su u biti promjenljive veličine (v. Granična vrijednost). Zovu se i *infinitezimalne veličine,* a proučavaju se u *infinitezimalnom računu.* Simbol za beskonačno (veliko) je ∞.

Beskonačno daleke tačke i pravci. Ako se dva pravca a i b sijeku u tački T, a pri tome se pravac b vrti oko svoje nepomične tačke S, koja je izvan a, onda se tačka T giba po pravcu a sve dalje u jed-

nom smjeru. Kad se ona udalji beskonačno daleko, tada će pravac *b* postati paralelan s pravcem *a*. Zato se u geometriji po dogovoru kaže: dva se paralelna pravca sijeku u beskonačno dalekoj tački. Analogno se kaže: dvije paralelne ravnine sijeku se u beskonačno dalekom pravcu. Takvo shvaćanje zove se *projektivno* i čini osnov *projektivne geometrije,* naime: dva se pravca u ravnini uvijek sijeku u jednoj tački, a dvije ravnine u prostoru u jednom pravcu, bilo u konačnosti, bilo u beskonačnosti. Svaki pravac ima jednu beskonačno daleku tačku, a svaka ravnina jedan beskonačno daleki pravac. Sve beskonačno daleke tačke i pravci leže u jednoj beskonačno dalekoj ravnini prostora.

BINOM, matematički izraz za dvije veličine povezane znakom (+) ili (—), (v. Opći brojevi).

BINOMNE JEDNADŽBE, v. Jednadžbe.

BINOMNI KOEFICIJENTI, v. Kombinatorika; Binomni poučak.

BINOMNI POUČAK, jednakost kojom se *n*-ta potencija binoma izražava potencijama oba člana, ili b. p. je pravilo za izračunavanje izraza $(a + b)^n$. Binomni poučak za pozitivne cijele eksponente glasi

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 +$$

$$\ldots + \binom{n}{n-2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n =$$

$$= \sum_{r=o}^{r=n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

Kako je $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ (v. Kombinatorika), imamo:

$$(a+b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots +$$

$$+ \binom{n}{2} a^2 b^{n-2} + \binom{n}{1} a b^{n-1} + b^n$$

Općenito je oblik člana: $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$, odakle se dobije svaki član, kad se za r stavi po redu: 0, 1, 2, 3, ..., n. Zato se brojevi $\binom{n}{r}$ zovu *binomni koeficijenti*. Iz svojstva da je $\binom{n}{r-1} + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r}$ izlazi da je zbroj dvaju binomnih koeficijenata n-te potencije koji dolaze jedan za drugim jednak novom binomnom koeficijentu $(n+1)$-ve potencije. Na ovome se osniva tzv. *Pascalov trokut*, sastavljen od brojeva koji predstavljaju binomne koeficijente, naime:

Za $n = 0$ 1

$n = 1$ 1 1

$n = 2$ 1 2 1

$n = 3$ 1 3 3 1

$n = 4$ 1 4 6 4 1

$n = 5$ 1 5 10 10 5 1

$n = 6$ 1 6 15 20 15 6 1

$n = 7$ 1 7 21 35 35 21 7 1

$n = 8$ 1 8 28 56 70 56 28 8 1, itd.

Dade se pokazati: 1) da je suma koeficijenata razvoja $(a + b)^n$ jednaka 2^n; 2) da je suma koeficijenata koji stoje na neparnim mjestima jednaka sumi koeficijenata članova koji stoje na parnim mjestima, a svaka od njih je jednaka 2^{n-1}.

Posebni slučajevi:

$$(1 + x)^n = 1 + \binom{n}{1} x + \binom{n}{2} x^2 + \ldots + x^n =$$

$$= \sum_{r=0}^{r=n} \binom{n}{r} x^r$$

$$(1 + x)^r = 1 + \binom{r}{1} x + \binom{r}{2} x^2 + \binom{r}{3} x^3 + \ldots; \text{ sa-}$$

da je r ma koji realan broj, a razvoj vrijedi uz uvjet $|x| < 1$. Bio je važan momenat u matematici kada je *Newton* pokazao da binomni poučak vrijedi i za razlomljene eksponente, samo se u tom slučaju ne dobiva razvoj s konačnim brojem članova, kao

što je slučaj ako je eksponent n cio broj, kada u razvoju bude $n + 1$ član. *Euler* je proširio poučak i na slučaj iracionalnih brojeva, a *Abel* (1826) dao je najopćenitiju formulaciju, da a, b i n mogu biti ma kakvi brojevi, pa i kompleksni.

$$\sqrt{1 + x} = (1 + x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2 \cdot 4}x^2 +$$

$$+ \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}x^4 + - \ldots$$

Odavde se dobiju formule za približno izračunavanje korijena:

$$\sqrt[n]{1 + x} \doteq 1 + \frac{x}{2}, \qquad \sqrt[n]{1 + x} \doteq 1 + \frac{x}{n}$$

$$\frac{1}{1 + x} = (1 + x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - + \ldots,$$

ako je $|x| < 1$

Ovo na desnoj strani nije ništa drugo nego beskonačni *geometrijski red.*

Napomena: pomoću razvoja po binomskom poučku i prijelazom na graničnu vrijednost nađe se da je

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots$$

BISEKTRISA (RASPOLOVNICA KUTA), v. Simetrija.

BOŠKOVIĆ, Ruđer Josip (Dubrovnik, 18. V 1711 — Milano, 13. II 1787). Škole je polazio u Dubrovniku, zatim u Rimskom isusovačkom kolegiju. Profesor matematike u Rimskom kolegiju. Od 1736. nižu se njegove rasprave iz matematike, geofizike, mehanike, optike, astronomije i geodezije. Već prva od njih, *O sunčevim pjegama,* pobudila je pažnju stručnjaka. Postao je glasovit po raspravama napose iz primijenjene matematike. Mjerio je meridijan između Rima i Riminija. Godine 1757. je u Beču. Tu je napisao svoje veliko djelo *Philosophiae naturalis theoria redacta ad unicam legem virium in natura existentium* (1758). U njemu je postavio novi zakon djelovanja sila među česticama tijela koje su prema njemu čestice sila. Godine 1763. izabrao ga je Univerzitet u Paviji profesorom matematike, a 1770. prelazi u Milano na katedru optike i astronomije, radeći uz to na osnivanju zvjezdarnice u Breri. Zbog nekih sukoba bečki ga je dvor 1772. razriješio uprave u zvjezdarnici. Poslije toga bio je u Parizu direktor optike Zavoda za mornaricu, pa je primio i francusko državljanstvo. U Parizu se bavio istraživanjima u optici i teoretskoj astronomiji. God. 1783—1785. nastanio se u Bassanu, gdje je izradio pet svezaka svojih *Opera pertinentia ad opticam et astronomiam.* Bošković je bio vrlo radin i svestran. Uz brojna spomenuta djela obavljao je u svom životu i poslove arhitekta, hidroinženjera i arheologa.

BRIDOVI, v. Geometrijsko tijelo; Prostorni ugao.

BRIGGSOVI LOGARITMI, v. Logaritmiranje.

BROJ, osnovni i centralni pojam cjelokupne matematike. Pojavio se najprije kao *prirodan* ili *cio broj* (v. Niz prirodnih brojeva) iz prvobitne operacije *brojenja*. Mjerenje veličina dovelo je do razlomljenih brojeva (v. Razlomci), čime se pojam broja znatno proširio. Do daljnjeg proširenja pojma broja došlo je iz potreba računanja s veličinama koje se mijenjaju u dva smjera. To je dovelo do *»algebarskih« brojeva (pozitivnih* i *negativnih).* Cijeli i razlomljeni pozitivni i negativni brojevi zovu se jednim imenom *racionalni brojevi* (v. Područja brojeva). Svojstvo je racionalnih brojeva da je rezultat koje god od četiri osnovne računske operacije s racionalnim brojevima opet racionalan broj. Svaki cijeli broj predstavlja određenu množinu jedinica. Ako se imenuje kakve su te jedinice, broj se zove *imenovan,* npr. 5 kg, 20 cm, itd., a ako je izražen s više jedinica iste vrste, tada je *višeimenovan broj,* npr. 15 m 6 dm 4 cm, ili $15^0\ 23'\ 42''$, itd. Osim područja racionalnih brojeva ima još i drugih širih područja brojeva (v. Iracionalni brojevi; Imaginarni i kompleksni brojevi; Područja brojeva).

BROJENJE, pridruživanje brojeva iz *niza prirodnih brojeva* predmetima za koje treba saznati *koliko* ih je.

BROJEVNA CRTA, v. Koordinatni sistem.

BROJEVNI IZRAZ, svaki spoj posebnih brojeva pomoću znakova aritmetičkih operacija. Brojevni izraz se još zove *aritmetički izraz.* Rezultat izvođenja naznačenih operacija u brojevnom izrazu zove se *vrijednost brojevnog izraza.*

Redoslijed izvršenja računskih operacija. Zbrajanje i oduzimanje zovu se operacije nižeg stepena, a množenje i dijeljenje operacije višeg stepena. *Pravila:* kad je brojevni izraz sastavljen samo od operacija istog stepena, one se izvrše onim redoslijedom kojim su naznačene; kad je brojevni izraz sastavljen od operacija i nižeg i višeg stepena, izvrše se najprije operacije višeg stepena, a zatim operacije nižeg stepena. Redoslijed prema ovim pravilima zove se *normalan redoslijed.* Ako treba odstupiti od normalnog redoslijeda izvršenja računskih operacija, onda se upotrebljavaju *zagrade* kojih ima tri vrste: (...) *okrugla* ili *mala* zagrada [...] *uglata* ili *srednja* zagrada {...} *zavinuta, vitičasta* ili *velika* zagrada. Ako u brojevnom izrazu dolaze zagrade, izračunavaju se najprije izrazi u zagradama, a zatim se izvrši računanje normalnim redoslijedom. Pri tome se najprije izračunavaju izrazi u malim, zatim u srednjim i na kraju u velikim zagradama.

BROJEVNI SISTEMI, v. Sistemi brojeva.

BROJKA (ZNAMENKA, CIFRA), v. Sistemi brojeva.

BROJNIK, v. Razlomci.

BRUTO, npr. bruto-primanja = cjelokupni iznos primanja bez odbitaka; bruto-težina = cjelokupna težina zajedno s *tarom;* bruto-težina = neto-težina + tara (v. Neto).

C

CARNOTOV (Karnoov) **POUČAK,** v. Kosinusov poučak.

CASSINIJEVE KRIVULJE (OVALI), v. Krivulja.

CENTAR, središte: 1. kružnice, kruga; 2. kugle, kugline plohe; 3. simetrije; 4. elipse i hiperbole; i dr.

CENTEZIMALNI SISTEM, v. Sistemi mjera.

CENTI, naziv, prefiks koji se stavlja ispred osnovne jedinice da se naznači stoti dio (v. Sistemi mjera).

CENTRALNA PROJEKCIJA, v. Projekcije.

CENTRALNA SIMETRIJA, v. Simetrija.

CIFRA, v. Sistemi brojeva.

CIKLOIDA, v. Krivulja.

CILINDAR, v. Valjak.

CILINDRIČNA PLOHA (VALJKASTA PLOHA), v. Plohe; Analitička geometrija.

CISOIDA, v. Krivulja.

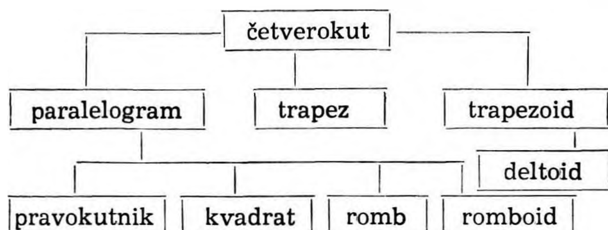
CRTA (LINIJA), v. Geometrijski elementi.

CRTAČI PRIBOR, v. Geometrijsko crtanje.

Č

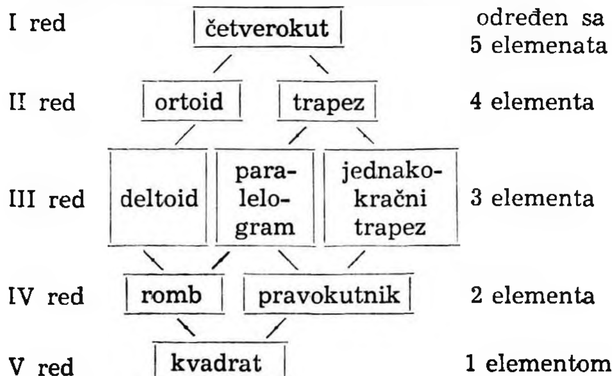
ČETVEROKUT, zatvoren ravan lik, omeđen sa četiri dužine koje se zovu *stranice*. Po dvije susjedne stranice sijeku se u tačkama koje se zovu *vrhovi*. Prema tome ima četiri vrha. Dužine koje spajaju dva suprotna vrha zovu se *dijagonale*. Ima dvije dijagonale. Svaka dijagonala dijeli četverokut na dva trokuta. Četverokut ima četiri *nutarnja kuta,* a sukuti nutarnjih kutova zovu se *vanjski kutovi*. Zbroj nutarnjih kutova u četverokutu iznosi 360^0, a isto toliko iznosi i zbroj vanjskih kutova. Četverokut kome je svaki pojedini nutarnji kut manji od 180^0 zove se *konveksan*. Pravac siječe njegov obod najviše u dvije tačke. Ima li četverokut jedan nutarnji kut veći od 180^0, zove se *konkavan*. Pravac mu može sjeći obod u više tačaka. Četverokut je općenito određen sa pet nezavisnih elemenata. Prema vrsti četverokuta taj broj može biti i manji. U općem slučaju dva su četverokuta sukladna kad se podudaraju u pet homolognih elemenata.

Vrste četverokuta: Uobičajena podjela prikazana je ovako:



Paralelogram — dva para paralelnih stranica; *trapez* — jedan par paralelnih stranica; *trapezoid* — nema paralelnih stranica; *pravokutnik* — suprotne stranice jednake, kutovi pravi; *kvadrat* — stranice jednake, kutovi pravi; *romb* — stranice jednake, ali kutovi nisu pravi; *romboid* — suprotne stranice jednake, ali kutovi nisu pravi, *deltoid* — nema paralelnih stranica, nego su dvije i dvije susjedne stranice jednake.

Druga klasifikacija može se prikazati ovako:



Pojedini četverokuti definiraju se ovako: *ortoid* je četverokut kojemu su dijagonale međusobno okomite; *trapez* je četverokut kojemu su dvije suprotne stranice paralelne; *deltoid* je ortoid kojem jedna dijagonala raspolavlja drugu; *romb* je ili deltoid kojemu se dijagonale raspolavljaju, ili paralelogram kojemu su dvije susjedne stranice jednake; *jednakokračni trapez* je trapez kojemu su kraci jednaki i neparalelni; *paralelogram* je trapez kome su kraci jednaki i paralelni; *pravokutnik* je paralelogram kojemu je jedan kut pravi; *kvadrat* je ili romb kojemu su dijagonale jednake, ili pravokutnik kojemu su dvije susjedne stranice jednake.

Opseg i *površina* četverokuta, v. Opseg; Površine likova.

ČETVEROSTRAN i **ČETVEROVRH**, likovi u *projektivnoj geometriji.*

Potpuni četverovrh definiraju četiri tačke A, B, C i D u ravnini, od kojih po tri ne leže na jednom pravcu. Spojnice ovih tačaka su stranice potpunog četverovrha, a sjecišta suprotnih stranica AB i CD, AC i BD, AD i BC jesu dijagonalne tačke P, Q i R, koje tvore njegov *dijagonalni trovrh.*

Potpuni četverostran, određuju četiri pravca u ravnini a, b, c i d od kojih po tri ne prolaze jednom tačkom. Šest sjecišta ovih pravaca vrhovi su potpunog četverostrana ab, ac, ad, bc, bd, cd. Spojnice suprotnih vrhova ab i cd, ac i bd, ad i bc jesu dijagonale potpunog četverovrha p, q i r i tvore njegov *dijagonalni trostran.*

Potpuni četverostran i potpuni četverovrh jesu osnovne i međusobno *dualne tvorevine* projektivne geometrije. Dualne stoga jer se njihovi elementi mogu dovesti u takav odnos da tačkama i njihovim spojnicama kod četverovrha odgovaraju pravci i njihova sjecišta kod četverostrana.

ČETVRTICA, naziv za znamenku 4 ili za broj 4; upotrebljava se za numeriranje nekih predmeta, ili kao ekvivalent nekom pojmu. Npr. četvrtica kao broj tramvaja, ili četvrtica kao ocjena vrlo dobar.

ČISTA KVADRATNA JEDNADŽBA, v. Rješavanje jednadžbi.

ČUNJ, v. Stožac.

ČUNJOSJEČNICE, v. Presjeci stošca.

D

DECI, prefiks koji se stavlja ispred osnovne jedinice da se naznače niže jedinice, npr. decimetar — deseti dio metra; itd. (v. Sistemi mjera).

DECIMALNI BROJEVI, decimalni razlomci napisani u dekadskom sistemu. *Razlomak* kojemu je nazivnik neka dekadska jedinica zove se *desetinski* ili *decimalni razlomak.* Decimalni razlomci mogu se svrstati u *dekadski sistem.* Takvi brojevi pišu se na taj način da se iza cijelih jedinica stavi decimalni zarez. Znamenke iza decimalnog zareza zovu se *decimale.* Npr. $3 + \frac{2}{10}$ piše se 3,2 (3 cijela i 2 desetine). Decimalni razlomci pisani u dekadskom (decimalnom) sistemu (v. Sistemi brojeva) imaju ovaj opći neskraćeni oblik: $\frac{A}{10^n}$, gdje je A cio broj ili

$$a_m 10^m + a_{m-1}10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0 + a_{-1}10^{-1} + \\ + a_{-2}10^{-2} + \ldots + a_{-n}10^{-n}$$

gdje su $a_m, \ldots, a_{-n}$ dekadske *znamenke.* Skraćeni

oblik uvođenjem decimalnog zareza piše se ovako:

$$a_m a_{m-1} \ldots a_1 a_0, \ a_{-1} a_{-2} \ldots a_{-n}$$

Pravila prema kojima se izvode osnovne računske operacije s decimalnim brojevima slijede iz računanja s decimalnim razlomcima u neskraćenom obliku i svode se na računanje s cijelim brojevima (v. Zbrajanje; Oduzimanje; Množenje; Dijeljenje).

DEFINICIJA, općenito određivanje tačnog sadržaja nekog pojma pomoću njegovoga najbližeg rodnog pojma i oznaka po kojima se taj pojam razlikuje od ostalih pojmova koji potpadaju pod isti viši pojam. Npr. u geometriji definicija izriče osnovna svojstva geometrijskog lika i geometrijskih pojmova. Za svaki geometrijski lik može se uočiti od kojih se geometrijskih elemenata sastoji i na koji je način od njih sastavljen. Rečenica ili sklop rečenica kojim se izražava ta određenost geometrijskog lika zove se i u geometriji *definicija.* Slično vrijedi i za definicije općenito u matematici.

DEKA, prvi dio složenica u terminologiji metričkog sistema; znači da neku mjeru valja uzeti deset puta, npr. dekagram = 10 grama; dekalitar = 10 litara, itd. (v. Sistemi mjera).

DEKADSKI LOGARITMI, v. Logaritmiranje.

DEKADSKI SISTEM, v. Sistemi brojeva.

DELSKI PROBLEM, jedan od poznatih matematičkih problema staroga vijeka. Prema legendi, Delijci su se obratili na Delfijsko proročište tražeći savjet kako bi stišali srdžbu boga. Odgovoreno im

da će u tome uspjeti samo ako božji oltar u Delu, koji je imao oblik kocke, podvostruče (po obujmu), ali da i dalje zadrži oblik kocke. Rješenje ovog problema nije pošlo za rukom matematičarima staroga vijeka. Tek su matematičari u XIX st. dokazali da se takva konstrukcija uopće ne da izvesti u smislu izvođenja geometrijskih konstrukcija, tj. šestarom i ravnalom. Traženje rješenja delskog problema znatno je unaprijedilo nauku, naročito planimetriju.

DELTOID, četverokut sastavljen od dva nejednaka jednakokračna trokuta s jednakom zajedničkom osnovicom. Ta osnovica je *poprečna dijagonala.* Druga dijagonala zove se *uzdužna.* Uzdužna dijagonala određuje os simetrije i deltoida i njegove poprečne dijagonale. Dijagonale su međusobno okomite. Uzdužna raspolavlja poprečnu, kao i kutove kojima spaja vrhove. Poprečna dijagonala spaja vrhove jednakih kutova. Simetrale kutova deltoida sijeku se u jednoj tački koja je jednako udaljena od svih stranica. Ta je tačka središte kružnice koja se može upisati deltoidu. Deltoid je jednoznačno određen sa tri nezavisna elementa.

Opseg i *površina* deltoida, v. Opseg; Površine likova.

DERIVACIJA, v. Diferencijalni račun.

DESCARTES, René, (Dekart, 1596—1650), francuski filozof, matematičar i fizičar. U matematici utemeljuje *analitičku geometriju.* Djelom *La géométrie* (Leyden, 1637) otvara novu epohu u razvitku matematike uvođenjem *koordinatnog sistema* i me-

đusobno zavisnih promjenljivih veličina kojima je stvorena veza između algebre i geometrije i osnovana analitička geometrija, a na njenim temeljima će se kasnije razviti diferencijalni i integralni račun.

DESCARTESOV LIST, v. Krivulja.

DESETICA, naziv za broj 10.

DESETINSKI BROJ, v. Decimalni brojevi.

DESKRIPTIVNA GEOMETRIJA (NACRTNA GEOMETRIJA, OPISNO MJERSTVO), područje geometrije u kojem se prostorni geometrijski likovi ili trodimenzionalni predmeti predočuju pomoću njihovih *projekcija* u ravnini. Projekcije zadanog geom. lika ili predmeta određuju se na dva načina: *paralelnom* i *centralnom projekcijom*. U paralelnoj projekciji *zrake projiciranja* međusobno su paralelne, a mogu biti okomite (ortogonalne) ili kose prema ravnini slike. Zato se razlikuju: *ortogonalna* i *kosa paralelna projekcija*. Pri kosom projiciranju postoje također dva postupka: *metoda kose projekcije* i *aksonometrijska metoda*. Ove se metode upotrebljavaju u geometriji prilikom prikazivanja geometrijskih tijela i likova. U centralnoj projekciji ili *perspektivi* zrake projiciranja izlaze iz jedne tačke *(centra projiciranja)*. Centralna projekcija najviše se upotrebljava u arhitekturi i slikarstvu.

DETERMINANTA, element koji određuje neku činjenicu ili neki rezultat. U obliku određene sheme predočuje izvjesnu vrijednost ili broj. Tako *determinanta drugog reda* ima oblik:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

a znači u stvari izraz: $a_1b_2 - a_2b_1$

Determinanta trećeg reda

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \mathrm{D}$$

simbolično ili shematski predstavlja izraz:

$a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + b_1c_2a_3 - b_1c_3a_2 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2$

ili drugačije pisano pomoću determinanti drugoga reda:

$$a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = D \qquad (^*)$$

Slova (brojevi) $a_1, b_1, \ldots, b_3, c_3$ zovu se *elementi determinante.*

Determinante drugog reda koje dolaze u (*) zovu se *minori* elemenata a_1, b_1, c_1. Zovu se još i *subdeterminante.*

Općenito: minorom bilo kog elementa zove se determinanta koja se dobije iz dane determinante precrtavanjem onog *retka* i *stupca* na kojem stoji element.

U formuli (*) elementi a_1, b_1, c_1 pomnoženi su sa

$$+\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad -\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}; \quad +\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

Ti se izrazi s predznacima nazivaju *algebarski komplementi* (ili *kofaktori)* elemenata a_1, b_1, c_1. Opće-

nito, algebarski komplement nekog elementa jeste minor uzet sa svojim predznakom ili suprotnim, i to: ako je suma rednih brojeva retka i stupca, na čijem presjeku stoji element, paran broj, minor se uzima sa svojim predznakom; ako je ta suma neparan broj, tada sa suprotnim predznakom. Algebarski komplementi elemenata a_1, b_1 ..., c_3 označuju se sa A_1, B_1, ..., C_3.

Poučci: determinanta D jednaka je sumi produkata elemenata bilo kog retka s njihovim algebarskim komplementima, tj.

$$D = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1; \quad D = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2;$$
$$D = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3$$

Determinanta D jednaka je sumi produkata elemenata bilo kog stupca s njihovim algebarskim komplementima, tj.

$$D = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3; \quad D = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3;$$
$$D = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3$$

Na osnovi ova dva poučka olakšava se izračunavanje determinante kad među elementima ima nula.

Analogni poučci vrijede i za *determinante višega reda.*

Svojstva determinanti: Vrijednost determinante se ne mijenja ako se svaki redak zamijeni sa stupcem istog rednog broja. Ako se zamijene međusobno bilo koja dva retka ili bilo koja dva stupca, vrijednost determinante ostaje po apsolutnoj vrijednosti ista, samo se predznak mijenja u suprotni. Determinanta u kojoj su elementi jednog retka (stupca) proporcionalni odgovarajućim elementima drugog retka (stupca), jednaka je nuli. Napose je

determinanta sa dva jednaka retka (stupca) jednaka nuli. Zajednički faktor svih elemenata jednog retka (ili stupca) može se staviti ispred znaka determinante (izlučivanje zajedničkog faktora), tj. vrijedi, npr.

$$\begin{vmatrix} ma_1 & ma_2 & ma_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = m \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ako je svaki element bilo kog stupca (retka) jednak sumi dvaju pribrojnika, tada je determinanta jednaka sumi dviju determinanti: u jednoj stoje samo prvi pribrojnici, a u drugoj drugi pribrojnici, dok su ostali elementi u obje determinante isti kao i u zadanoj. Npr.

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 + m_1 & a_3 \\ b_1 & b_2 + m_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 + m_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & m_1 & a_3 \\ b_1 & m_2 & b_3 \\ c_1 & m_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Determinanta ne mijenja vrijednost ako se elementi jednog retka ili stupca pomnože jednim te istim faktorom i algebarski pribroje elementima nekog drugog retka ili stupca, npr.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

Rješavanje sistema jednadžbi s više nepoznanica pomoću determinanti. Npr. sistem $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$ ima rješenje

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

a izrazi u brojnicima i nazivnicima nisu ništa drugo nego determinante, i to u jednom i u drugom nazivniku dolazi ista determinanta koeficijenata uz nepoznanice u njihovom rasporedu kao i u sistemu. To je *determinanta sistema.* U brojnicima su determinante koje se dobiju iz determinante sistema ako se mjesto koeficijenta uz dotičnu nepoznanicu stave konstantni članovi iz jednadžbenog sistema (oni se nalaze na desnoj strani jednadžbi). Dakle je:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

Slično je i sa sistemom tri jednadžbe sa tri nepoznanice:

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned}$$

Rješenje pomoću determinanti glasi:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{D_y}{D}, \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{D_z}{D}$$

Ovdje su D_x, D_y, D_z, D kraće oznake za determinante u brojniku i nazivniku.

Na osnovi ovih formula može se provesti *diskusija:* 1. slučaj: ako je determinanta sistema različita od nule, tj. $D \neq 0$, sistem ima *jedno određeno rješenje.* 2. slučaj: ako je $D = 0$, a jedna od determinanti D_x, D_y, D_z nije jednaka nuli, sistem *nema rješenja.* 3. slučaj: ako je $D = 0$, $D_x = 0$, $D_y = 0$, $D_z = 0$ (koeficijenti i apsolutni članovi u dvije jednadžbe su proporcionalni, pa je jedna jednadžba posljedica druge), sistem ima *beskonačno mnogo rješenja.*

Napomena: pojam determinante drugoga i trećeg reda poopćava se na *determinante r-tog reda,* tj. determinanta ima r redaka i r stupaca. Kako se takve determinante izračunavaju, kakva su njihova svojstva i kako se primjenjuju, to je područje grane matematike koja se zove *teorija determinanti.*

DEVETICA, naziv ili za znamenku 9 ili za brojku 9 prilikom numeriranja predmeta.

DIEDAR, v. Geometrijski elementi.

DIFERENCIJA, v. Oduzimanje.

DIFERENCIJAL FUNKCIJE, v. Diferencijalni račun.

DIFERENCIJALNA GEOMETRIJA, ispituje svojstva krivulja i ploha na temelju njihovih jednadžbi (v. Analitička geometrija) pomoću metoda infinitezimalnog računa.

DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE, jednadžbe s nepoznatim funkcijama i njihovim derivacijama (v. Diferencijalni račun), a njihova se rješenja dobiju integriranjem (v. Integralni račun). Ako nepoznata funkcija zavisi samo od jedne varijable, d. j. se zovu *obične*. Ako nepoznata funkcija zavisi od dvije ili više varijabli, pa prema tome u diferencijalnoj jednadžbi dolaze i parcijalne derivacije tih funkcija, onda se takva diferencijalna jednadžba zove *parcijalna*.

DIFERENCIJALNI KVOCIJENT, v. Diferencijalni račun.

DIFERENCIJALNI RAČUN (RAČUN DERIVACIJA), bavi se izvođenjem pravila deriviranja i primjenom tih pravila na deriviranje konkretnih funkcija. D. r. primjenjuje se u istraživanju funkcija.

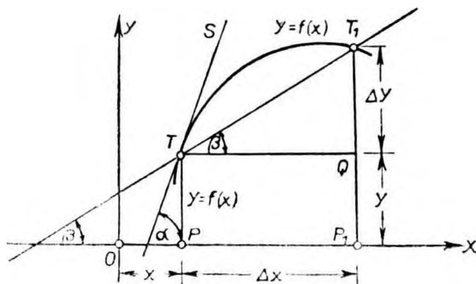
Pojam derivacije. Derivacija (ili izvod) funkcije u nekoj tački x jeste *granična vrijednost* kvocijenta između *priraštaja funkcije* i *priraštaja* (nezavisne) *varijable*, ako priraštaj varijable teži nuli, tj.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

Da bi ta granična vrijednost postojala, nužno je da

$\Delta y \rightarrow 0$, kada $\Delta x \rightarrow 0$, tj. da je funkcija *neprekidna* (v. Funkcija).

Do pojma derivacije najjednostavnije se dolazi određivanjem smjera tangente u nekoj tački krivulje, koja je u koordinatnom sistemu XOY određena funkcijom $y = f(x)$. U tački T te krivulje povučena je sekanta TT_1 (sl. 6). Vrti li se ta sekanta oko sjecišta T, dok sjecište T_1 ne padne u tačku T, prijeći će sekanta u tangentu s diralištem u T. Tačka T ima koordinate $(x; y)$, a tačka T_1 koordinate $(x + \Delta x; y + \Delta y)$. Ovi priraštaji Δx *i* Δy bit će sve manji što tačka T_1 bude bliže tački T. Smjer sekante TT_1 određen je kutom što ga ona zatvara



Sl. 6

sa osi x, dakle je koeficijent smjera $\operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Kad se tačka T_1 giba po krivulji prema tački T, tada kut β teži prema kutu α, a Δx i Δy prema nuli, tj.

$\beta \rightarrow \alpha$, $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$. Zato je $\operatorname{tg} \alpha = \lim\limits_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (v. Granična vrijednost). Ova granična vrijednost, tj. derivacija $f'(x)$ funkcije $f(x)$, dakle je koeficijent smjera tangente.

Postupak traženja derivacije. I. dati varijabli priraštaj Δx; II. izračunati priraštaj Δy funkcije $y = f(x)$, tj. $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$; III. načiniti kvocijent $\frac{\Delta y}{\Delta x}$; IV. naći graničnu vrijednost tog kvocijenta: $\lim\limits_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Dobiveni rezultat je tražena derivacija.

Poučci. Derivacija sume jednaka je sumi derivacija pojedinih pribrojnika. Ako je $y = f(x) + g(x)$, tada je $y' = [f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$. Derivacija razlike jednaka je razlici derivacija. Ako je $y = f(x) - g(x)$, onda je $y' = [f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$. Derivacija produkta: ako je $y = f(x) \cdot g(x)$, onda je $y' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$. Derivacija kvocijenta: ako je $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, onda je $y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

Posebni slučajevi:

Ako je $y = a$, onda je $y' = 0$

Ako je $y = a f(x)$, onda je $y' = a f'(x)$

Ako je $y = x$, onda je $y' = 1$

Ako je $y = x^n$, onda je $y' = n \cdot x^{n-1}$ (n ma kakav realan broj)

Ako je $y = \sqrt[m]{x} = x^{\frac{1}{m}}$, onda je $y' = \frac{1}{m} \cdot x^{\frac{1}{m}-1}$

Ako je $y = \sin x$, onda je $y' = \cos x$

Ako je $y = \cos x$, onda je $y' = -\sin x$

Ako je $y = \operatorname{tg} x$, onda je $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Ako je $y = \operatorname{ctg} x$, onda je $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

Ako je $y = e^x$, onda je i $y' = e^x$

Ako je $y = a^x$, onda je $y' = a^x \cdot \ln a$

Ako je $y = \ln x$, onda je $y' = \frac{1}{x}$

Ako je $y = \log x$, onda je $y' = \frac{1}{x} \cdot \log e$

Derivacija složene funkcije. Ako je $y = y(u)$, a $u = u(x)$, onda je $y'(x) = y'_u(u) \cdot u'_x(x)$. Analogno je pravilo i za složene funkcije preko više posrednih funkcija.

Derivacija inverznih funkcija. Ako je $y = f(x)$, onda je $x = g(y)$, pa je $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$, a $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} =$

$= g'(y)$. Pošavši od identiteta $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1 : \frac{\Delta x}{\Delta y}$, nađe se $f'(x) = \frac{1}{g'(y)}$, tj. derivacija inverzne funkcije jednaka je recipročnoj vrijednosti derivacije direktne funkcije.

Derivacija implicitne funkcije: $F(x, y) = 0$. Najprije se derivira $F(x, y)$ po x, F'_x, smatrajući y konstantnim, zatim se derivira $F(x, y)$, po y, F'_y, smatrajući x konstantnim, ali vodeći sada računa o tome da je y funkcija od x, dobije se:

$$F'_x(x, y) + F'_y(x, y) \cdot y' = 0 \text{ ili } y' = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$$

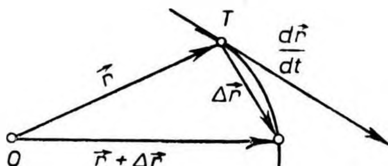
$F'_x(x, y)$ i $F'_y(x, y)$ zovu se *parcijalne derivacije.*

Pojam diferencijala. Umjesto $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f'(x)$ može se pisati na osnovi poučka o limesu $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = f(x) + h$, gdje $h \to 0$, kad $\Delta x \to 0$. Odavde je $\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + h \cdot \Delta x$. Prvi pribrojnik zove se *glavni dio priraštaja funkcije* i definira diferencijal funkcije, tj. $d\,f(x)$, dakle je: $d\,f(x) = f'(x) \cdot dx$. Ako se derivacija označi, prema Leibnizu, sa $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, onda se odmah dobije diferencijal $dy = f'(x) \cdot dx$. Diferencijal funkcije $y = f(x)$ u nekoj tački krivulje geometrijski znači priraštaj ordinate tačke na tangenti te krivulje, dok je Δy priraštaj ordinate tačke na krivulji.

Derivacija vektorske funkcije $\vec{a} = \vec{f}(t)$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{f}(t + \Delta t) - \vec{f}(t)}{\Delta t}$$

predstavlja novu vektorsku funkciju od t. Geometrijsko značenje derivacije radijus-vektora, tj. $\frac{d\vec{r}}{dt}$ je vektor koji tangira *hodograf* (v. Vektori; Funkcija) u odgovarajućoj tački (sl. 7). Duljina $\frac{d\vec{r}}{dt}$ zavisi



Sl.7

od izbora parametra t. Ako je t vrijeme, tada funkcija $\vec{r}(t)$ predstavlja gibanje tačke T u prostoru, a $\frac{d\vec{r}}{dt}$ po veličini i smjeru brzinu tog gibanja.

Derivacije višeg reda. Kako je derivacija neke funkcije općenito opet funkcija, to i derivacija može imati derivaciju. Derivacija prve derivacije zove se

druga derivacija (y'' ili $\frac{d^2y}{dx^2}$). Derivacija druge derivacije zove se *treća derivacija* (y''' ili $\frac{d^3y}{dx^3}$). Općenito, derivacija n-tog reda $y^{(n)}$ ili $f^{(n)}(x)$ jest derivacija derivacije (n-1)-vog reda.

Diferencijali višeg reda. Kako je $dy = f'(x)\,dx$, to je $d(dy) = d^2y = d(f'(x)\,dx) = [f'(x)\,dx]' \cdot dx = f''(x) \cdot dx^2$. To se zove *diferencijal drugog reda* ili, kraće, *drugi diferencijal*. Općenito *diferencijal n-tog reda* je $d^ny = f^{(n)}(x) \cdot dx^n$.

Napomena: derivacije se sada mogu pisati pomoću diferencijala, naime: $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ ..., $y^{(n)} =$

$$= \frac{d^ny}{dx^n}$$

Primjene derivacije u geometriji.

Jednadžba tangente. Kako $f'(x_0)$ geometrijski znači koeficijent smjera tangente na krivulju $y = f(x)$ u njezinoj tački $(x_0; y_0)$, glasi jednadžba tangente: $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$. Ako je $f'(x_0) = 0$, tangenta je paralelna s apscisnom osi.

Jednadžba normale. Kako se pravac koji prolazi diralištem, a okomit je na tangenti, zove *normala krivulje*, to će koeficijent smjera normale biti recipročan i suprotan koeficijentu tangente, pa jednadžba normale glasi: $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$

Element luka — ds. Ako je s luk na krivulji $y = f(x)$, nađe se da je

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$$

Od daljnjih primjena u geometriji neka bude samo spomenuto: konkavnost i konveksnost, zakrivljenost krivulje, kružnica zakrivljenosti, asimptote i dr.

Teorem o srednjoj vrijednosti, ili Lagrangeov teorem, kaže da između x_0 i $x_0 + h$ postoji barem jedno mjesto u kome je tangenta paralelna sa sekantom. To se iskazuje ovako: $f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \vartheta h)$ gdje je $0 < \vartheta < 1$

Proučavanje toka funkcije pomoću derivacije. Za *rast* funkcije u nekoj tački nužno je i dovoljno da derivacija funkcije u toj tački bude pozitivna. Za *pad* funkcije u nekoj tački nužno je i dovoljno da derivacija funkcije u toj tački bude negativna. *Ekstremne vrijednosti funkcije* (maksimum i minimum). Ako u svakoj dovoljno maloj okolini tačke $x = x_0$ postoji vrijednost $y_0 = f(x_0)$ koja je veća (manja) od svih ostalih vrijednosti funkcije u toj okolini, kaže se da funkcija za $x = x_0$ ima relativan maksimum (minimum) $y_0 = f(x_0)$. Ako je funkcija derivabilna, tj. ima derivaciju u tački x_0, i ako je $f(x_0)$ ekstrem funkcije $f(x)$, onda je nužno da bude $f'(x_0) = 0$. Treba, dakle, naći derivaciju $y' = f'(x)$ i izjednačiti je s nulom, pa naći korijene te jednadžbe. U tim tačkama može funkcija imati ekstremne vrijednosti, ali može da bude i slučaj *tačke infleksije,* u kojoj krivulja prelazi s jedne strane tangente na drugu. Dovoljan je uvjet za postojanje ek-

stremnih vrijednosti da druga derivacija u toj tački bude različita od nule, i to: ako je $y''(x_0) > 0$, u tački x_0 funkcija ima *minimum*, a ako je $y''(x_0) < 0$, ima *maksimum*.

Primjena derivacija u fizici i dr. Kako je derivacijom puta po vremenu definirana brzina, i kako je druga derivacija puta po vremenu akceleracija, to će se derivacije najviše primjenjivati u najrazličitijim područjima fizike. Derivacije se primjenjuju i u tehnici i u drugim naukama (kemiji i dr.), a danas i u ekonomskim naukama, itd.

Napomena: glavni osnivači diferencijalnog računa bili su *G. W. Leibniz* i *I. Newton* (XVII st.), koji su ga otkrili u isto vrijeme, prvi u geometriji polazeći od problema tangente, a drugi u mehanici rješavajući problem brzine.

DIJAGONALA, dužina koja spaja dva vrha *mnogokuta* (koji ne leže na istoj stranici), ili dva vrha *poliedra* (koji ne leže na istom bridu). Broj svih dijagonala u mnogokutu izračunava se prema formuli $\frac{n(n-3)}{2}$, gdje je n broj svih stranica mnogokuta. Kod poliedra razlikuju se prostorne i plošne dijagonale.

DIJAGONALNI PRESJEK, v. Prizma; Piramida.

DIJAGRAM, v. Grafičko predočivanje.

DIJAMETAR (PROMJER), svaka tetiva krivulje ili plohe koja prolazi njenim središtem. Kružnica, kao i kuglina ploha, ima sve dijametre jednake. Di-

jametri elipse među sobom su nejednaki; najveći među njima zove se *velika os*, a najmanji *mala os* elipse. Hiperbola također ima nejednake dijametre. Najmanji dijametar zove se *realna os*, najvećeg dijametra hiperbola nema. Dijametri parabole svi su među sobom usporedni jer se središte parabole nalazi u beskonačno dalekoj tački njene osi.

DIJELJENJE (DIVIZIJA), četvrta osnovna računska radnja (operacija). Izvršiti diviziju, odnosno podijeliti broj a brojem b znači odrediti broj c tako da bude $a = bc$. Dijeljenje se simbolički označuje znakom »:« (čita se: »podijeljeno sa«) i piše se $a : b = c$. Broj koji se dijeli zove se *djeljenik* ili *dividend*. Broj kojim se dijeli zove se *djelitelj* ili *divizor*, a rezultat dijeljenja zove se *količnik* ili *kvocijent*. Za diviziju vrijedi *distributivni zakon*, dok komutativni i asocijativni zakon ne vrijedi.

Dijeljenje cijelih brojeva. Dijeliti znači odrediti koliko se puta divizor nalazi u dividendu; ta vrsta dijeljenja zove se *mjerenje*. Dijeljenje s nulom nema smisla. Kao što se ne može svaka množina rastaviti na jednake množine, ne može se ni svaki broj razdijeliti svakim cijelim brojem da rezultat bude cio broj. Tada se dobije *nepotpuni kvocijent* i *ostatak*. Kvocijent se ne mijenja ako se dividend i divizor istim brojem pomnože ili podijele. Zbroj se dijeli brojem da se svaki pribrojnik podijeli tim brojem i zatim se dobiveni djelomični kvocijenti zbroje.

Pismeno dijeljenje jednoznamenkastim divizorom: npr. $6\,903 : 3 = (6T + 9S + 0D + 3J) : 3 = 6T : 3 +$

$+ 9S : 3 + OD : 3 + 3J : 3 = 2T + 3S + OD + 1J =$
$= 2301$, ili općenitije:

$7\,362 : 6 = (7T+3S+6D+2J) : 6 = 1T+2S+2D+7J =$
$= 1\,227$

ostatak 1T
13S
ost. 1S
16D
ost. 4D
42J
Ø

Skraćeno: 7362 : 6 = 1227
13
16
42
Ø

Dijeljenje višeznamenkastih brojeva. Npr.

35532 : 423 = 84
— 3384D
169D
1692J
— 1692J
Ø

Dijeljenje decimalnih brojeva cijelim brojem obavlja se kao i kod cijelih brojeva, samo poslije dijeljenja cijelih mjesta stavlja se u kvocijentu decimalni zarez, pa se dijeljenje produži dok se ne iscrpu sve decimale. Decimalni broj dijeli se decimalnim tako da se dividend i divizor pomnože višom dekadskom jedinicom koja ima toliko nula

koliko divizor decimala (naime, divizor mora biti cijeli broj). Time se svede na dijeljenje decimalnog broja cijelim brojem.

Dijeljenje »algebarskih« brojeva. »Algebarski« brojevi dijele se tako da se podijele apsolutne vrijednosti, a kvocijent dobiva predznak + ako divident i divizor imaju jednake predznake, a predznak — ako oni imaju različite predznake.

Dijeljenje općih brojeva.

Monoma monomom:

$a^m : a^n = a^{m-n}$; $Aa^m : Ba^n = (A : B)\, a^{m-n}$.

Polinoma monomom: svaki član polinoma podijeli se tim monomom i dobiveni kvocijenti zbroje:

$$(a + b - c + \ldots) : m = (a : m) + (b : m) - (c : m) + \ldots$$

Polinome polinomom

$$\begin{array}{l} (a + b + c + \ldots) : (m + n + p + \ldots) = (a : m) + \ldots \text{ itd.} \\ \underline{-\, a \pm (a : m)n \pm (a : m)p \pm \ldots} \\ \quad b - (a : m)n + c - (a : m)p + \ldots \text{ itd.} \\ \qquad\qquad \text{itd.} \end{array}$$

Napomena: da se dijeljenje ekonomično provede valja ponajprije poredati članove oba polinoma, ili sve po rastućim, ili (još bolje) sve po padajućim potencijama iste baze. Npr.

$$\begin{array}{ll} (6x^5 - 13x^3y + 3x^2y^2 + 6xy^2 - 2y^3) : (2x^3 - 3xy + y^2) = 3x^2 - 2y & \\ \underline{\pm\, 6x^5 \mp 9x^3y \pm 3x^2y^2 \ldots} & \text{mijenjanje predznaka} \\ \qquad -4x^3y \qquad + 6xy^2 - 2y^3 & \\ \underline{\qquad \mp 4x^3y \qquad \pm 6xy^2 \mp 2y^3 \ldots} & \text{mijenjanje predznaka} \\ \qquad\qquad \emptyset & \end{array}$$

Dijeljenje razlomaka. Razlomak se dijeli cijelim brojem tako da se brojnik podijeli (ako se može) tim brojem, a nazivnik ostane isti, ili brojnik ostane nepromijenjen, a nazivnik se pomnoži tim brojem. Broj (cio ili razlomljen) dijeli se razlomkom tako da se dividend pomnoži *recipročnom vrijednošću* divizora. Prema tome se dijeljenje svodi na množenje s recipročnom vrijednošću.

Dijeljenje algebarskih razlomaka. Svodi se na množenje dividenda *recipročnom vrijednošću* divizora. Dakle:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Složeni razlomci ili dvojni razlomci. Razlomci kod kojih su brojnik, ili nazivnik, ili i brojnik i nazivnik također razlomci. Opći je oblik:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} \left(= \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc} \right)$$

gdje se *a* i *d* zovu *vanjski članovi, b* i *c unutarnji članovi.* Crta koja odvaja oba razlomka složenog razlomka zove se glavna crta složenog razlomka. Dvojni razlomak može se shvatiti kao dijeljenje dvaju razlomaka, pa se izračunava prema pravilu dijeljenja. Dvojni razlomak svodi se na obični tako da se pomnože vanjski članovi i napišu kao brojnik, a zatim se pomnože unutarnji i napišu kao nazivnik.

DIMENZIJA, smjer prostiranja u prostoru; tri dimenzije, tri međusobno okomita smjera. Tačka je bez dimenzije; pravac i krivulje su jednodimenzionalne tvorevine, imaju samo *duljinu;* ravnina i plohe imaju dvije dimenzije: *duljinu* i *širinu;* tijelo je trodimenzionalno i ima: *duljinu* (ili debljinu, ili dubinu), *širinu* i *visinu.* Dimenzije prostora određene su brojem odredbenih podataka *(koordinata)* za osnovni element. Prostor kao skup tačaka je trodimenzionalan, jer su potrebna tri podatka da se odredi položaj tačke u njemu: x, y, z. Ako je osnovni element pravac, onda je prostor četverodimenzionalan, jer je pravac u prostoru određen pomoću četiri podatka, *parametra.*

DIOFANTOVE JEDNADŽBE, v. Neodređene jednadžbe.

DIRALIŠTE, zajednička tačka krivulje i njene tangente, ili plohe i njene tangencijalne ravnine.

DIREKTRISA (PROVODNICA, VODILJA), krivulja uzduž koje se pomiče *generatrisa (izvodnica)* neke plohe. Npr. pravac koji stoji okomito na ravninu kružnice i pomiče se paralelno uzduž kružnice opisat će uspravnu valjkastu plohu. Kružnica je direktrisa, a pravac je izvodnica.

Kod *konika* direktrisa ili *ravnalica* je polara fokusa krivulje. Direktrisa elipse i hiperbole dana je izrazom: $x = \frac{a^2}{e}$, a za parabolu jednadžbom: $x = -\frac{p}{2}$ (a = poluos, e = linearni ekscentricitet, p = poluparametar).

DISKRIMINANTA, izraz $D = a^2 (x_1 - x_2)^2 = b^2 - 4ac$ za kvadratnu jednadžbu $ax^2 + bx + c = 0$. U slučaju da je $D = 0$, jednadžba ima dva jednaka korijena $x_1 = x_2$ (v. Rješavanje jednadžbi). U algebri postoji poopćeni pojam diskriminante.

DIVERGENCIJA, v. Redovi; Granična vrijednost; Niz.

DIVIDEND, v. Dijeljenje.

DIVIZIJA, v. Dijeljenje.

DIVIZOR, v. Dijeljenje.

DJELIŠTE, tačka koja dužinu dijeli sa dva dijela u nekom omjeru. Kada tačka dijeli dužinu na dva jednaka dijela, zove se *polovište.*

DIJELITELJ, v. Dijeljenje.

DJELJENIK, v. Dijeljenje.

DJELJIVOST BROJEVA, dio aritmetike koji daje pravila i postupke kako se određuje da li je neki broj djeljiv nekim drugim brojem.

Prosti i složeni brojevi. S obzirom na djeljivost ima dvije vrste prirodnih brojeva većih od 1: jedni su djeljivi sa 1 i sa samim sobom, to su *prosti* ili *prim brojevi,* dok su drugi osim sa 1 i samim sobom djeljivi još i drugim brojevima, to su *složeni brojevi.* Broj koji je djeljiv nekim brojem zove se *višekratnik* tog broja, a taj broj kojim je djeljiv zove se *mjera* ili *faktor* prvog broja. Svaki produkt kao višekratnik je složen broj i kao takav djeljiv sa svakim svojim faktorom (mjerom). Ako je jedan broj mjera nekog drugog broja, onda je on mjera

i višekratnika toga drugog broja. Ako su pribrojnici jedne sume djeljivi nekim brojem, onda je i suma djeljiva tim brojem, ili ako je neki broj mjera dvaju ili više brojeva, onda je on mjera i sume (i razlike) tih brojeva.

Pravila o djeljivosti. Broj je djeljiv sa 10 ako mu je posljednja znamenka nula. (Slično vrijedi i za djeljivost višim dekadskim jedinicama.) Broj koji na kraju ima nulu djeljiv je i sa 2 i sa 5. *Parni brojevi* su oni koji završavaju znamenkama 0, 2, 4, 6 ili 8. Svaki parni broj je djeljiv sa 2. Broj je djeljiv sa 2 (ili 5) ako mu je posljednja znamenka broj djeljiv sa 2 (ili 5). Broj je djeljiv sa 4 (ili 25), ako je sa 4 (ili 25) djeljiv broj koji čine znamenke desetica i jedinica (dvoznamenkasti završetak). Broj je djeljiv sa 5 ako mu je posljednja znamenka 0 ili 5. Broj je djeljiv sa 8 (ili 125) ako mu je djeljiv sa 8 (ili 125) broj koji čine znamenke stotica, desetica i jedinica (troznamenkasti završetak). Broj je djeljiv sa 3 ili sa 9 ako je suma njegovih znamenki djeljiva sa 3 ili sa 9. Broj je djeljiv sa 11 ako mu je djeljiva sa 11 razlika između sume znamenki na parnim mjestima i sume znamenki na neparnim mjestima. Postoje pravila i za djeljivost drugim brojevima, ali ta pravila nisu jednostavna.

Rastavljanje na proste faktore. Ako se neki složen broj napiše u obliku produkta samo prostih faktora, kaže se da je složeni broj rastavljen na proste faktore. Ako se pomnože prosti faktori nekog broja, dobije se taj broj. Rastavljanje nekog broja praktično se obavlja ovako: pored broja se povuče vertikalna crta i s desne strane pišu se prosti divi-

zori, a dobiveni kvocijenti se potpisuju ispod broja, npr.:

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

dakle je $120 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$

Najveća zajednička mjera. Mjera koja se nalazi u dva ili više brojeva naziva se *zajednička mjera.* Ako je više takvih mjera, onda je jedna najveća, pa se zato i zove *najveća zajednička mjera,* a obilježava se kraće sa N.z.m. Prema tome N.z.m. zadanih brojeva je najveći broj kojim su djeljivi svi zadani brojevi. Za dva broja koji nemaju nijednog zajedničkog faktora osim 1 kaže se da su *relativno prosti brojevi,* i možemo reći da nemaju zajedničke mjere. N.z.m. dvaju ili više brojeva jednaka je produktu njihovih zajedničkih faktora. Postupak se razabire iz primjera. Npr.

140	175	245	5
28	35	49	7
4	5	7	

pa je N.z.m. $(140, 175, 245) = 5 \cdot 7 = 35$

Najmanji zajednički višekratnik, (n.z.v.), najmanji broj u kome su sadržani zadani brojevi kao mjere. Ako je manji od dva broja sadržan u većem, onda je veći broj n.z.v. Ako su zadani brojevi prosti ili relativno prosti, onda je n.z.v. jednak njihovom

produktu. Za dva ili više brojeva n.z.v. nađe se tako da se njihova najveća zajednička mjera još pomnoži preostalim faktorima iz tih brojeva. Praktično se radi ovako:

140	175	245	5
28	35	49	7
4	5	7	

pa je n.z.v. (140, 175, 245) $= \underbrace{5 \cdot 7}_{\text{najveća zajednička mjera}} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7$

Djeljivost općih brojeva. Može se govoriti i o djeljivosti općih brojeva i o rastavljanju algebarskih izraza na faktore. Kad se opći broj (ili algebarski izraz) a podijeli općim brojem (ili algebarskim izrazom) b, pa se dobije kvocijent q (broj ili izraz) bez ostatka, tj. $a : b = q$, onda se kaže da je a djeljivo sa b. Ako pri dijeljenju postoji ostatak r, onda je $a = bq + r$.

Složeni broj dade se prikazati u obliku produkta rastavljanjem u proste faktore: $N = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot p_3^{a_3} \ldots$ gdje su $p_1, p_2, p_3, \ldots$ prosti faktori, a eksponenti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ kazuju koliko puta pojedini prosti faktori dolaze kao faktori. $2n$ je opći oblik parnih brojeva, a $2n + 1$ ili $2n - 1$ je opći oblik neparnih brojeva. Stavljajući za n po redu vrijednosti, iz niza prirodnih brojeva dobiju se svi parni odnosno neparni brojevi.

Rastavljanje polinoma na faktore u vezi je s djeljivošću.

Binomi: $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$; $a^{2n+1} + 1 = (a + 1)(a^{2n} - a^{2n-1} + - \ldots - a + 1)$

Polinomi: svi članovi polinoma imaju kao zajednički faktor jedan te isti izraz. Npr. $am + bm - cm = m(a + b - c)$. U pojedinim grupama članova ima zajedničkih faktora. Rastavljanje kvadratnog trinoma koji je potpun kvadrat. Trinom se izjednači s nulom, te se nađu korijeni dobivene kvadratne jednadžbe, pa se načini produkt korijenih faktora. Kombinacija prethodnih slučajeva.

Kao kod posebnih brojeva, analogno se i kod općih brojeva i polinoma traži najveća zajednička mjera i najmanji zajednički višekratnik.

DODEKAEDAR, v. Poliedar.

DOGLEDNICA, v. Kut.

DOKAZ, postupak da se dokaže da je nešto istinito, ili se zaključivanjem izvodi jedna istina iz drugih već poznatih ili priznatih istina. U matematici se dokazuje svaki *teorem.* To se izvodi na dva različita načina: 1) ako se dokazuje na temelju aksioma i prije dokazanih teorema ono što kaže tvrdnja u teoremu, dokaz se zove *direktan;* 2) ako se pri dokazivanju teorema ne dokazuje ono što izriče tvrdnja, nego se dokazuje da se ono što je protivno od tvrdnje protivi kojem aksiomu ili već dokazanom teoremu, dokaz se zove *indirektan.*

DULJINA, 1) duljina neke *dužine* je njena veličina izražena brojem mjernih jedinica sadržanih u njoj; 2) duljina *luka* krivulje duljina je one dužine na koju se može izravnati taj luk.

DUODECIMALNI SISTEM, v. Sistemi brojeva.

DUŽINA, dio pravca koji je omeđen dvjema krajnjim tačkama. Obilježava se obično njenim krajnjim tačkama, ili se na njenoj sredini piše malo slovo. Npr. dužina AB ili dužina a. Uzme li se u obzir i smjer dužine, govori se o *usmjerenoj dužini* ili *vektoru.*

Mjerenje dužina. Izmjeriti dužinu znači odrediti njenu *duljinu,* tj. odrediti broj koji kaže koliko se puta neka za to odabrana dužina — *jedinica mjere* — nalazi u zadanoj dužini. Broj koji se tako dobije zove se mjerni broj dužine. *Grafičko računanje s dužinama,* v. Geometrijske konstrukcije. *Simetrala dužine,* v. isto.

DVOJKA, naziv ili za brojku 2 ili za brojku 2 upotrijebljenu prilikom numeriranja, ili uzet kao ekvivalent nekom pojmu, npr. dvojka kao ocjena »dovoljan«.

DVOJNI RAZLOMAK (SLOŽENI RAZLOMAK), v. Dijeljenje.

DVOOMJER, omjer dvaju omjera.

Dvoomjer četiriju tačaka jeste izraz $\frac{AC}{AD} : \frac{BC}{BD}$, gdje su A, B, C, D četiri po volji odabrane tačke na pravcu, a AC, AD, BC, BD usmjerene dužine određene tim tačkama. Dvoomjer tačaka A, B, C, D piše se simbolički (A, B, C, D) ili $(ABCD)$.

Dvoomjer četiriju zraka jeste izraz: $\frac{\sin ac}{\sin ad} : \frac{\sin bc}{\sin bd}$, gdje su a, b, c, d četiri po volji

odabrane zrake pramena, a kut *ac*, kut *ad*, kut *bc* i kut *bd* četiri usmjerena kuta određena tim zrakama. Dvoomjer zraka *a*, *b*, *c*, *d* piše se simbolički (*a*, *b*, *c*, *d*) ili (*abcd*).

E

EKSCENTRIČAN, pojam koji označuje nešto što je izvan središta. Ekcentrične kružnice (v. Kružnica).

EKSCES SFERNI, v. Sferna geometrija.

EKSPLICITNI OBLIK, v. Funkcija; Pravac u analitici.

EKSPONENCIJALNA FUNKCIJA, v. Funkcija.

EKSPONENCIJALNA JEDNADŽBA, v. Jednadžba.

EKSPONENT, v. Potenciranje.

EKSTREMNE VRIJEDNOSTI, v. Diferencijalni račun.

EKVIVALENTNO, ono što može zamijeniti drugo a da zbog toga ne nastupi nikava promjena. U geometriji su ekvivalentna (jednaka) dva lika koja imaju jednake površine ili jednake obujme, ali nemaju isti oblik. Ekvivalentne jednadžbe (v. Jednadžba).

ELEMENT, najjednostavniji sastavni dio neke složene cjeline. U matematici podatak, vrijednost, veličina potrebna da se izvrši neka računska operacija, prikaže ili izračuna neki proces (npr. element krivulje, tačka, pravac, itd.); v. Geometrijski elementi.

ELEMENTI EUKLIDOVI, v. Euklid.

ELIPSA, skup svih tačaka u ravnini, za koje je suma *radijus-vektora* od dvije čvrste tačke F_1 i F_2 *(žarišta* ili *fokusi)* uvijek stalna i jednaka *glavnoj (velikoj) osi* elipse: $r_1 + r_2 = 2a$ (*a* je *velika poluos).* Pravac koji spaja fokuse, kao i simetrala dužine između fokusa, jesu osi simetrije lika omeđenog elipsom, dakle i same elipse. Tačka u kojoj se sijeku osi simetrije zove se *središte* elipse, a to je i *centar simetrije.* Svaka tetiva koja prolazi središtem elipse njezin je **dijametar.** Ako su $F_1(—e; 0)$ i $F_2(e; 0)$ fokusi, onda je $\frac{1}{2} F_1 F_2 = e$ i zove se **linearni ekscentricitet.** Ako je mala **poluos** *b*, onda vrijedi relacija $b^2 = a^2 — e^2$.

Osna jednadžba elipse glasi: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ili $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ako se fokusima povuku pravci $x = e$ i $x = — e$, onda se duljina tetive koju odsijeca elipsa na ovim pravcima označuje sa $2p$ i naziva se *parametar* elipse. Dobije se da je *p (poluparametar)* $= \frac{b^2}{a}$. Omjer $\frac{e}{a} = \varepsilon$ zove se *numerički ekscentricitet* elipse. Ako je $a = b$, elipsa prelazi u kružnicu: $x^2 + y^2 = a^2$

Radijus-vektori: $r_1 = a + \frac{ex}{a}$, $r_2 = a - \frac{ex}{a}$

Uvjetna jednadžba, kojoj moraju zadovoljavati veličine: a, b, m i n, da pravac $y = mx + n$ bude tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$, *glasi:* $a^2m^2 + b^2 = n^2$

Jednadžba tangente u tački $(x_1; y_1)$ elipse glasi:

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1), \text{ ili sređeno:}$$

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$$

Jednadžba normale: $y - y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$

Polara. Pravac koji spaja dirališta obiju tangenti povučenih iz tačke T $(u; v)$ na elipsu zove se *polara* tačke T s obzirom na elipsu. Tačka T se zove *pol* te polare. Jednadžba polare glasi: $b^2ux + a^2vy = a^2b^2$

Tjemena (ili **vršna**) **jednadžba elipse:** $y^2 = 2px - \frac{px^2}{a}$ (radi usporedbe v. Parabola).

Mehanička konstrukcija elipse. Krajevi jedne niti konca pričvrste se za dvije pribadače tako da je dužina konca veća od njihove udaljenosti. Zatim se vrhom olovke nategne konac i drži stalno nategnut, pa se pomiče uokrug. Vrh olovke opisuje elipsu.

Geometrijska konstrukcija elipse izvodi se na osnovi definicije elipse (v. Geometrijske konstrukcije).

ELIPSOID, zatvorena centralnosimetrična ploha

drugog stepena i tijelo omeđeno tom plohom (v. Analitička geometrija).

ELIPTIČKA GEOMETRIJA, v. Neeuklidske geometrije.

EMPIRIČKE KRIVULJE, v. Krivulja.

EPICIKLOIDA, v. Krivulja.

EUKLID, jedan od najvećih grč. matematičara staroga vijeka (oko 300. pr. n. e.). Matematičko obrazovanje dobio je u Ateni od Platonovih učenika. Došavši u Aleksandriju osnovao je visoku školu u kojoj je predavao geometriju. Njegovo je najveće djelo, a ujedno i najveće matematičko djelo staroga vijeka, *Stoiheia* (Elementi), poznato pod imenom *Euklidovi elementi,* u 13 knjiga u kojima je sistematski obradio sve dotadašnje znanje iz matematike, a dodao je i mnogo originalnih radova. U prve četiri i u šestoj knjizi nalazi se planimetrija, u posljednje tri knjige stereometrija, a u ostalim sva preostala područja dotadašnjeg matematičkog znanja. Polazeći od *aksioma (postulata),* Euklid je u tom djelu postavio temelje strogom i dosljednom dokazivanju geometrijskih *teorema* na tako savršen način da su se njegove metode izlaganja i dokazivanja geometrijskih teorema još i danas održale.

Neobično je utjecala na razvoj geometrije formulacija V aksioma: kad pravac presijeca druga dva pravca, pa s njima na istoj strani zatvara unutarnje kutove, kojih je zbroj manji od dva prava, onda

se ova dva pravca sijeku s one strane na kojoj je taj zbroj manji od dva prava. Danas se ovaj aksiom zamjenjuje jednostavnijim ekvivalentnim aksiomom: tačkom izvan pravca može se povući samo jedna paralela. Upravo složenost formulacije V aksioma pobudila je već kod prvih Euklidovih sljedbenika i komentatora sumnju da li je to doista aksiom ili je to teorem koji valja istom dokazati na osnovi ostalih aksioma. Više od 2000 godina bavili su se matematičari tim pitanjem i u svojim pokušajima traženja odgovora znatno su unaprijedili geometriju. Pravi odgovor dali su istom *K. F. Gauss,* a naročito *N. I. Lobačevski* i *J. Bolyai.* Napokon je bilo dokazano da je V aksiom s pravom svrstan među aksiome, jer je ustanovljeno da je on potpuno nezavisan od ostalih aksioma. Rješenjem toga problema otkrivene su nove, tzv. *neeuklidske geometrije:* geometrija Lobačevskoga ili hiperbolička geometrija, i Riemannova ili eliptička geometrija.

EUKLIDOV ALGORITAM, postupak kojim se određuje *najveća zajednička mjera* bilo dviju dužina, bilo dvaju brojeva.

EULER Leonhard (Ojler, 1707—1783), švicarski matematičar, fizičar i astronom, jedan od najvećih matematičara svoga vremena. Eulerov je život u stvari neprekidno istraživanje čiste i primijenjene matematike. Ukupno je napisao 756 radova, od kojih su 473 objavljena za njegova života. Razvio je teoriju redova, riješio je mnoge diferencijalne jednadžbe, dokazao je više teorema iz teorije brojeva.

EULEROV PRAVAC, pravac na kojem leže tri karakteristične tačke trokuta: sjecište simetrala stranica, sjecište visina i težište.

EULEROVE FORMULE, povezuju trigonometrijske funkcije realnog argumenta i eksponencijalnu funkciju imaginarnog argumenta, tj. $e^{ix} = \cos x + i \sin x$; $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$.

F

FAKTOR, u matematici onaj broj kojim se množi (v. Množenje).

FAKTOR PROPORCIONALNOSTI, v. Omjeri.

FAKTORIJEL, znak $n!$, produkt svih prirodnih brojeva od *1* do n, tj. $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$ (v. Kombinatorika).

FOKUS (ŽARIŠTE), v. Presjeci stošca.

FORMA, oblik, izgled. Geometrijska tijela razlikuju se osim veličinom i položajem još i svojim oblikom.

FORMULA, kratko pravilo, propis. U matematici se ide za što kraćim načinom pisanja, pa se umjesto nekih veličina uvode slova i s njima se postupa kao s općim brojevima. Tako se može neko pravilo ili zakon iskazati kratko u obliku formule.

FUNKCIJA, promjenljiva veličina kojoj vrijednosti po nekom propisu (zakonu) zavise od jedne ili više drugih veličina. Pojam funkcije ključni je pojam cjelokupne matematike kojim se ona vezuje

za zbivanja u prirodi, i pomoću njega istražuje i formulira ta zbivanja. Zato se pojam funkcije primjenjuje ne samo u matematici nego i u dnevnom životu, zatim u nauci i tehnici.

Načini zadavanja funkcije. Postoje tri osnovna načina kako može biti iskazana funkcionalna zavisnost:

Tabelarni način. U najrazličitijim prilikama svakidašnjeg života i prakse, uopće svagdje gdje je riječ o brojenju i mjerenju, dobivaju se izvjesni numerički podaci. Takve se brojevne vrijednosti mogu skupiti pregledno ako se unesu u *tablice* ili *tabele* bilo *vertikalne* bilo *horizontalne.* Skupovi brojeva u nekim numeričkim tablicama daju neko činjenično stanje, sadrže izvjesne podatke o nekim veličinama. Druge su tablice opet rezultat mjerenja pri promatranju neke pojave ili zakonitosti. Nekada se u numeričkim tablicama skupljaju rezultati izvjesnih računskih operacija (tablice kvadrata, tablice drugih korijena, itd.), pa takve tablice onda zamjenjuju ponovno izvođenje nekih operacija. Postoje i tablice u obliku knjiga (logaritamske tablice, i dr.).

Grafički način. Radi zornosti i lakše preglednosti mogu se podaci numeričkih tablica predočiti npr. dužinama, likovima, shemama pa čak i ilustrirati prikladnim slikama. Prilikom takvih prikazivanja treba znati u kome se *omjeru* crtaju slike i crteži (npr. ako 1 mm predočuje 1 km, onda se to piše: $1 \text{ mm} \mathrel{\overset{\wedge}{=}} 1 \text{ km}$; čita se »1 mm odgovara 1 km«). Kako su u tablicama obično *parovi pridruženih vri-*

jednosti, i kako je u matematici naročito uveden i postupak da se ti parovi brojeva predoče u *koordinatnom sistemu,* govori se o *grafičkom predočivanju.* Dobivena slika u koordinatnom sistemu zove se *graf* ili *grafikon.* Postoje i aparati koji *automatski* crtaju bez prekida krivulju. Npr. *termograf* crta krivulju *termogram,* tj. krivulju promjene temperature. Slično *barograf* crta *barogram,* tj. krivulju promjene atmosferskog tlaka, itd.

Analitički način. Najidealniji je način ako se funkcionalna zavisnost izrazi pomoću *analitičkog izraza* ili *formule.* Pri tome je naznačeno koje matematičke operacije i u kome redu treba izvršiti s vrijednostima argumenta i s konstantnim brojevima da bi se dobila pripadna vrijednost funkcije. Funkcionalna zavisnost od jedne promjenljive veličine bilježi se simbolički $y = \mathrm{f}(x)$, (čitaj: y je funkcija od x), gdje je x nezavisno promjenljiva veličina (*nezavisna varijabla* ili *argumenat*), a y je zavisno promjenljiva veličina (*zavisna varijabla* ili *funkcija).* Simbol f označuje sve one operacije koje treba izvršiti sa x da se dobije odgovarajuća vrijednost od y. Dakle je f *funkcionalni operator.* Općenito pri svakoj funkciji postoji: skup vrijednosti argumenta x; skup vrijednosti funkcije y; zakon po kome se poznatim ili zadanim vrijednostima od x pridružuju vrijednosti y.

Ako funkcija y zavisi od više nezavisno promjenljivih veličina: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tada se piše $y = \mathrm{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Takva se funkcija proučava na taj način da se promatra kako ta veličina ovisi o jednoj

od nezavisnih varijabli, uz uvjet da se ostale smatraju konstantnima.

Jednoznačnost i višeznačnost; domena. Ako svakoj vrijednosti argumenta neke funkcije pripada samo jedna vrijednost funkcije, kaže se da je *funkcija jednoznačna.* Ako svakoj vrijednosti argumenta x pripadaju dvije vrijednosti funkcije y, zove se *dvoznačna funkcija,* itd. Općenito se kaže da je funkcija *n-značna* u tački x, ako u toj tački ima n vrijednosti, tj. ako je tome x pridružen skup od n vrijednosti funkcije. Pod *područjem* ili *domenom* funkcije razumijeva se skup vrijednosti x za koje je funkcija definirana.

Identične funkcije, funkcije koje imaju isto područje i istu vrijednost u svakoj tački tog područja. Znak je ($\equiv$) (identično ili identično jednako). Npr. $f(x) \equiv g(x)$. Zamjenjivanje nekog izraza (funkcije) identičnim izrazom (funkcijom) zove se *identična transformacija.* Identične transformacije upotrebljavaju se da se izrazi svedu na oblik koji je što više pojednostavnjen ili je pogodniji u nekom slučaju.

Eksplicitni i implicitni oblik. Ako je funkcija napisana tako da se odmah vidi koje operacije treba izvesti da se iz nezavisne varijable izračuna pripadna vrijednost funkcije, kaže se da je napisana u *eksplicitnom obliku.* Piše se: $y = f(x)$. Ako se u jednadžbi kojom je definirana neka funkcija, svi članovi prenesu na lijevu stranu i tako dobivena jednadžba sredi, dobiva se *sređeni implicitni oblik:* $F(x, y) = 0$. Ako se implicitni oblik $F(x, y) = 0$ shvati kao jednadžba, pa se razriješi po y, dobije se

$y = f(x)$. Taj prijelaz od implicitnog na eksplicitni oblik ponekad je vrlo težak, a često se ne može izvesti običnim operacijama.

Inverzna funkcija. Ako je y dano kao funkcija od x, tj. $y = f(x)$, onda se u toj zavisnosti može y smatrati kao nezavisno promjenljiva veličina, pa će tada x biti neka funkcija od y, tj. $x = g(y)$; funkcija g se zove *inverzna funkcija* funkcije f, ali i obrnuto: f je inverzna funkcija funkcije g. Ako se u $x=g(y)$ argument kao obično označi sa x, a funkcija sa y, onda se dobije: $y = g(x)$, i to je zapravo *inverzna funkcija (druga krivulja!)*. Može se pokazati: ako je u koordinatnom sistemu predočena funkcija $y = f(x)$, tada se graf inverzne funkcije $y = g(x)$ dobije tako da se za sve tačke krivulje $y = f(x)$ nađu simetrične tačke s obzirom na raspolovnicu (bisektrisu) prvog i trećeg kvadranta ($y = x$).

Složene funkcije. Ako je y funkcija od u, tj. $y = y(u)$, gdje je opet u funkcija od x, tj. $u = u(x)$, onda se y zove *složena funkcija* od x. Eliminira li se posredna funkcija u iz gornjih dviju relacija, dobije se $y = y[u(x)] = f(x)$. Može biti i više posrednih funkcija.

Vektorska funkcija. Promjenljivi *vektor* $\vec{a}$ naziva se *vektorskom funkcijom* skalarnog argumenta t, ako svakoj vrijednosti t odgovara određena vrijednost vektora $\vec{a}$. Simbol: $\vec{a} = \vec{f}(t)$. Vektorska funkcija zadana u *koordinatama*, tj. $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$, znači da su koordinate tri skalarne funkcije jedne

nezavisne varijable t: $a_x = f_x(t)$, $a_y = f_y(t)$, $a_z = f_z(t)$. Ako se promjenljivi vektor predoči u obliku *radijus-vektora:* $\vec{r} = \vec{r}(t)$ tačke T, tada pri promjeni varijable t tačka T opiše krivulju u prostoru, koja se zove *hodograf* vektorske funkcije. U koordinatama: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, pa je tada $\vec{r} = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$

Vrste funkcija. Ako je funkcija definirana u području D, kome su elementi realni brojevi, tada se ona zove *funkcija realne varijable.* Ako je D područje kompleksnih brojeva, zove se *funkcija kompleksne varijable.* (Ove se funkcije proučavaju u višoj matematici). Funkcija oblika algebarskog polinoma, tj. $y = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, gdje je $a_0 \neq 0$, a koeficijenti ne zavise od x, zove se *cijela racionalna funkcija.* Funkcija dana u obliku kvocijenta dviju cijelih racionalnih funkcija, tj.

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

zove se *racionalno razlomljena funkcija.* Pri tome, ako je $n < m$, funkcija je *pravo razlomljena,* ako je $n \geq m$, ona je *nepravo razlomljena funkcija.* Ako u funkciji dolaze potencije varijable s razlomljenim eksponentima, tj. varijabla ili izrazi s njom su pod korijenom, funkcija je *iracionalna.* Racionalne i iracionalne funkcije zovu se jednim imenom *algebarske funkcije.* Funkcije koje nisu algebarske zovu se *transcendentne.* Takve su npr. logaritamska f., trigonometrijske funkcije, itd.

Proučavanje funkcija.

Nul-tačke funkcije. Ako je funkcija f (x) definirana u skupu D, onda se svaki $x \in D$, za koji je f $(x) = 0$, zove ***nul-tačka*** funkcije. Algebarski polinomi n-tog stepena mogu imati najviše n realnih nul-tačaka. Ako je funkcija predočena grafički, onda njena presjecišta s apscisnom osi jesu njene nul-tačke.

Tok funkcije. Ako je f (x) jednoznačna realna funkcija, kaže se: 1) funkcija f (x) je ***uzlazna***, ako iz $x_1 < x_2$ izlazi f $(x_1) <$ f (x_2). Također se kaže: funkcija f (x) ***raste***, ili funkcija je ***rastuća;*** 2) funkcija f (x) je ***silazna***, ako iz $x_1 < x_2$ izlazi f $(x_1) >$ f (x_2). Također se kaže: funkcija f (x) ***pada*** ili funkcija je ***padajuća.***

Priraštaj argumenta. Ako x poprimi najprije vrijednost x_1 (prvobitna vrijednost), pa zatim x_2 (promijenjena vrijednost), tada se promjena, tj. razlika $x_2 - x_1$ zove ***priraštaj argumenta.*** Obilježava se sa Δx ili h, tj. $\Delta x = h = x_2 - x_1$. Ako je $x_2 > x_1$, onda je $h > 0$; za $x_2 < x_1$, $h < 0$, a za $x_2 = x_1$, $h = 0$.

Priraštaj funkcije. Ako argument funkcije $y =$ f (x) (prvobitna vrijednost) dobije priraštaj h, dakle f $(x + h)$ (promijenjena vrijednost), onda i funkcija y dobije priraštaj Δy, ili Δ f (x), ili k, tj. $y + k =$ f $(x + h)$, odavde je $\Delta y =$ f $(x + h) -$ f (x). Priraštaj funkcije Δy zavisi od priraštaja varijable. Ako funkcija raste (pada) priraštaj je pozitivan (negativan). Ako se načini kvocijent priraštaja funkcije i priraštaja argumenta za neku vrijednost $x = x_0$,

tada se taj kvocijent zove *srednja promjena* ili *relativni priraštaj* funkcije, pa je $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x_0} =$

$$= \frac{f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0)}{\Delta x_0}$$

Ovaj kvocijent ima geometrijsko značenje, jer je koeficijent smjera sekante, koja spaja dvije tačke luka krivulje $y = f(x)$ koje odgovaraju krajevima intervala $(x_0; x_0 + \Delta x_0)$. *Granična vrijednost* ovog kvocijenta, tj. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ u vezi je s graničnim položajem sekante kada ona prelazi u tangentu (v. Diferencijalni račun). Ako funkcija $s = s(t)$ znači duljinu prevaljenog puta u zavisnosti od vremena t, onda se *srednja brzina* (v_s) u intervalu $(t; t + \Delta t)$ definira kvocijentom priraštaja puta Δs i priraštaja vremena Δt, tj. $v_s = \frac{\Delta s}{\Delta t}$, dok se brzina u nekoj tački (u trenutku t), tj. *prava brzina* $v(t)$ dobije kao granična vrijednost: $v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Neprekidnost funkcije. Ako se graf funkcije $y = f(x)$ dade nacrtati jednim potezom, taj je graf neprekidna linija, pa se funkcija zove *neprekidna* ili *kontinuirana funkcija.* Ako se krivulja ne može nacrtati u jednom neprekidnom potezu, kaže se da ima prekid, a funkcija se zove *prekidna* ili *diskontinuirana.* Za neprekidnost funkcije $y = f(x)$ u nekoj tački $x = a$ karakteristično je: $\lim_{x \to a} f(x) =$

$= f(a)$, ili $\lim_{x \to a} [f(a) - f(x)] = 0$. Izraz $f(a) - f(x) = \Delta y$ je priraštaj funkcije koji pripada priraštaju varijable $\Delta x = a - x$. Kako iz $x \to a$ slijedi $\Delta x \to 0$, to iz $\lim_{x \to a} [f(a) - f(x)] = 0$ slijedi $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Dakle: funkcija $f(x)$ je neprekidna u tački x ako beskonačno malom priraštaju argumenta pripada beskonačno mali priraštaj funkcije. Za neku se funkciju kaže da je neprekidna u intervalu (a, b) ako je ona neprekidna za svaku vrijednost varijable x u intervalu (a, b). Ako se načini suma, diferencija ili produkt neprekidnih funkcija, onda će i tako dobivene funkcije biti neprekidne. Ovo ne vrijedi uvijek za kvocijent neprekidnih funkcija.

Neke specijalne funkcije.

Linearna zavisnost ili *linearna funkcija.* Zavisnost između dviju veličina izražena jednadžbom oblika $y = ax + b$, gdje su a i b određeni brojevi, zove se *linearna zavisnost* $(a \neq 0)$. Za $b = 0$ poprima oblik $y = ax$. Možemo pisati i ovako $\frac{y}{x} = a$. Takve veličine kod kojih je *omjer konstantan* zovu se *upravno proporcionalne veličine,* pa se i takva zavisnost zove *upravno proporcionalna zavisnost,* koja je prema tome poseban slučaj linearne zavisnosti. Broj a se zove *koeficijent* ili *faktor proporcionalnosti.*

Predznak linearne funkcije $y = ax + b$ $(a > 0)$. Bit će $y \gtreqless 0$, prema tome da li je izraz $ax + b \gtreqless 0$,

dakle da li je $x \gtreqless -\frac{b}{a}$. U slučaju da je a negativno, znaci nejednakosti u ovoj posljednjoj relaciji mijenjaju se u suprotne.

Graf upravno-proporcionalne zavisnosti (funkcije $y = ax$) je pravac koji prolazi ishodištem. Kako u $\frac{y}{x} = a$ faktor proporcionalnosti ostaje stalan, odražava se njegova veličina u *usponu* pravca ili u *koeficijentu smjera.* Ako je koeficijent a pozitivan, pravac s pozitivnim smjerom x-osi zatvara šiljasti kut, a ako je negativan, zatvara tupi kut (ovdje se govori o *negativnom usponu,* ili se kaže: pravac se *spušta*). Graf linearne funkcije $y = ax + b$ je pravac koji je paralelan s pravcem $y = ax$, a odsijeca na ordinatnoj osi odsječak b. Za konstrukciju grafa linearne funkcije dovoljno je naći dvije njegove tačke, npr. $(O; b)$ i $(-\frac{b}{a}; O)$. Primjene linearne funkcije na ilustraciju procesa iz stvarnosti, tj. procesa koji se mogu prikazati linearnom funkcijom, mogu biti vrlo različite (npr. jednoliko gibanje; grafički vozni red; primjeri iz fizike i tehnike, i dr.).

Kvadratna funkcija u općem obliku glasi: $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$.

Specijalan je slučaj ako je $a = 1$, $b = c = 0$, tada je $y = x^2$. To je *parabola* kojoj je *vrh* ili *tjeme* u ishodištu; okrenuta je prema gore, a ordinatna os je *os parabole.*

Ako se parabola $y = x^2$ pomakne za m uzduž apscisne osi, nastaje parabola $y = (x - m)^2$.

Ako se parbola $y = ax^2$ pomakne za m uzduž apscisne osi, dobije se parabola $y = a(x - m)^2$, koja apscisnu os dodiruje u tački $(m; O)$; ako je a pozitivno, otvor je parabole okrenut prema gore, ako je a negativno, prema dolje.

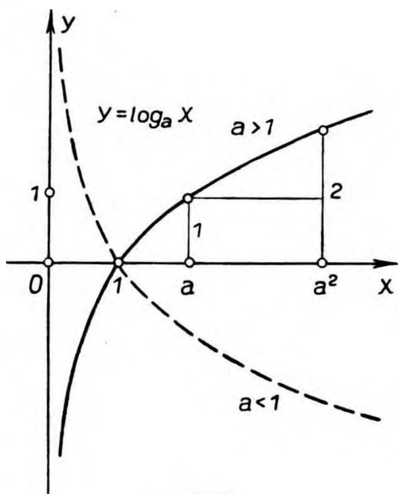
Ako se parabola $y = ax^2$ pomakne za m u smjeru apscisne osi, a za n u smjeru ordinatne osi, nastaje parabola $y - n = a(x - m)^2$. Njeno će se tjeme nalaziti u tački $(m; n)$; ako je $a > 0$, otvor parabole okrenut je prema gore, pa je tačka $(m; n)$ najniža tačka parabole, a n je minimum (najmanja vrijednost) funkcije $y = a(x - m)^2 + n$. Ako je $a < 0$, otvor je parabole okrenut prema dolje. Vrh ili tjeme je sada najviša tačka parabole, a broj n je maksimum (najveća vrijednost) izraza $a(x - m)^2 + n$.

Ako se pođe od općeg oblika $y = ax^2 + bx + c$, tada se on može pisati ovako: $y - \left(-\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right) = a\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right]^2$, gdje je $m = -\frac{b}{2a}$; $n = -\frac{b^2 - 4ac}{4a} = -\frac{D}{4a}$; to je parabola koja iz parabole $y = ax^2$ nastaje translacijom za $-\frac{b}{2a}$ u smjeru apscisne osi, a za $-\frac{D}{4a}$ u smjeru ordinatne osi. Tjeme te parabole nalazi se u tački $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$. Ako je $a > 0$, parabola je otvorom okre-

nuta prema gore, pa je broj $-\frac{D}{4a}$ najmanja vrijednost izraza $ax^2 + bx + c$ za realnu vrijednost $x = -\frac{b}{2a}$. Ako je $a < 0$, parabola je okrenuta prema dolje, pa je $-\frac{D}{4a}$ maksimalna vrijednost izraza $ax^2 + bx + c$. Ako je $D > 0$, parabola $y = ax^2 + bx + c$ siječe apscisnu os u dvije tačke $\left(\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}; 0\right)$ i $\left(\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}; 0\right)$ Ako je $D = 0$, parabola dodiruje apscisnu os u tački $\left(-\frac{b}{2a}; O\right)$ a ako je $D < 0$, parabola nema nijedne tačke zajedničke s apscisnom osi.

Logaritamska funkcija, iskazuje zakon prema kome se svakom broju x pridružuje njegov logaritam, tj. $\log x$. Dakle $y = \log x$. Uzme li se x na apscisnoj osi, a pripadni logaritam, tj. $\log x$ na ordinatnoj osi, dobit će se tačka T (x; $\log x$). Skup svih tih tačaka zove se *logaritamska krivulja,* a njena je jednadžba $y = \log x$ (sl. 8). Ordinata svake tačke na log. krivulji je logaritam njene apscise. Kako nema logaritma negativnih brojeva, to se krivulja sva nalazi desno od ordinatne osi. Logaritamska funkcija ima nul-tačku u tački (1; 0), u njoj krivulja presijeca apscisnu os, jer ako je $y = 0$, onda je $\log x = 0$, pa je odatle $x = 1$. Nadalje: ako je $x_1 < x_2$, onda je, jer je baza > 1, $\log x_1 < \log x_2$, i obrnuto. To znači da je log. funkcija rastuća (uzlazna), ali pri tome sve sporije raste. Ako je $x > 1$, pripadna tačka (x;

log x) leži u prvom kvadrantu. Ako je $x < 1$, bit će log $x < \log 1 = 0$, tj. logaritam je negativan broj, pa se tačka (x; log x) nalazi u četvrtom kvadrantu, i to što je x bliže ishodištu s desne strane, to je tačka (x; log x) više ispod apscisne osi i sve se više

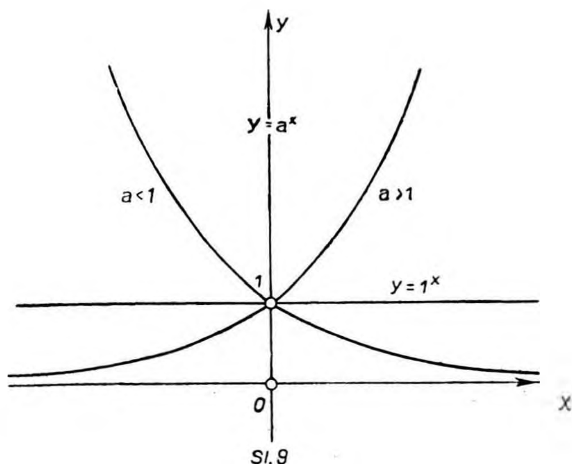


Sl. 8

približava ordinatnoj osi, tj. ordinatna os je *asimptota.* Logaritamska krivulja je u uskoj vezi s *eksponencijalnom* krivuljom, a prema tome i s eksponencijalnom funkcijom. One su uzajamno inverzne funkcije.

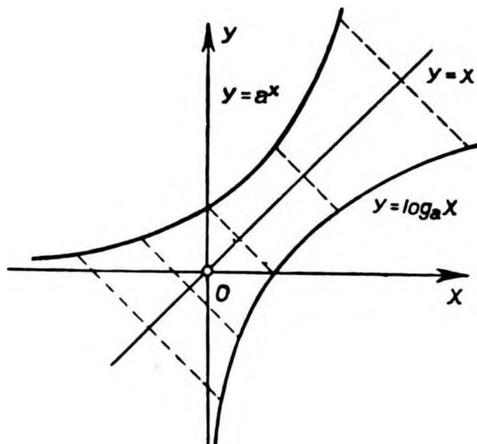
Eksponencijalna funkcija. Apscisa svake tačke na logaritamskoj krivulji dobije se kad se

baza 10 potencira s ordinatom promatrane tačke. Ako se brojevi x nanesu na apscisnu os, a brojevi 10^x na ordinatnu os, dobije se tačka (x; 10^x), pa je $y = 10^x$ jednadžba *eksponencijalne krivulje,* ili to je eksponencijalna funkcija (sl. 9.). Zato se kaže da



Sl. 9

je eksponencijalna funkcija inverzna funkcija logaritamskoj funkciji, a prema svojstvu inverznih funkcija jednoj tački na logaritamskoj krivulji odgovara tačka na eksponencijalnoj, koje su tačke međusobno simetrične prema bisektrisi (raspolovnici) prvog i trećeg kvadranta (sl. 10). Eksponencijalna krivulja je uzlazna na cijelom toku. Presijeca os y u tački (0; 1), a *asimptotski* se približava negativ-



Sl. 10

noj strani apscisne osi. Eksponencijalna krivulja uzdiže se vrlo brzo, tj. eksp. funkcija vrlo brzo raste.

FUNKCIJSKA SKALA, jedna vrsta geometrijskog predočivanja vrijednosti funkcije. Uz obične u svakidašnjem životu poznate nazive — skale (razna mjerila, kutomjer, i dr.), postoji i općenitiji pojam skale. Pravocrtna skala: kad se na jednom pravcu označi poprečnim crticama niz tačaka, i kad se pored tih crtica napiše niz brojeva koji rastu. Tako *graduiran* pravac zove se *nosilac,* a sama podjela čini *skalu.* Brojevi se zovu *kote.* Postoje dvije grupe: 1. *Metrička skala,* skala *jednolike* (ekvidistant-

ne) podjele. Kod nje je važan izbor jedinice, koji zavisi od veličine dužine što stoji na raspolaganju i služit će kao nosilac skale. 2. *Funkcijska skala* (s nejednolikom podjelom), u stvari je grafička predodžba (na pravcu ili na krivulji kao nosiocu) vrijednosti funkcije. Počevši od ishodišta uzetog na nosiocu, nanose se vrijednosti funkcije (mjerene odabranom jedinicom), ali na kraju tih dužina ne obilježavaju se vrijednosti funkcije, nego vrijednosti argumenta. Funkcijske skale čine osnov *nomografije* i *nomograma*. Jedna specijalna funkcijska skala je *logaritamska skala* na kojoj se zasniva *logaritamsko računalo*. Logaritamskom skalom zove se skala logaritamske funkcije $y = \log x$, a načini se tako da se na nosilac nanose vrijednosti logaritma, a pišu se kao kote vrijednosti numerusa (npr. kako je $\log 2 = 0{,}301$, nanese se od ishodišta vrijednost 0,301, ali se kod dobivene tačke piše numerus 2).

G

GAUSS, Karl Friedrich (1777—1855), njemački matematičar i astronom. Još kao student bavio se (1796) teorijom dijeljenja kružnice i dokazao mogućnost konstrukcije pomoću ravnala i šestara pravilnog sedamnaesterokuta ($17 = 2^4 + 1$), kao i svakog pravilnog mnogokuta sa $n = 2^{2^k} + 1$ stranica (gdje je *n prim broj* $k = 0, 1, 2, \ldots$). Time je riješio problem elementarne konstrukcije pravilnih poligona. God. 1799. promoviran je na osnovi disertacije *»Demonstratio nova ...«*, u kojoj je dokazao *osnovni stavak algebre* (v. Algebra; Jednadžba). Dvije godine kasnije objavio je *»Disquisitiones arithmeticae«*, u kojem je (1801) postavio osnove *teorije brojeva.* Baveći se osnovama geometrije, spoznao je mogućnost *neeuklidske geometrije.* Začetnik je i jedne *diferencijalne geometrije.*

GAUSSOVA KRIVULJA, v. Statistika.

GEODETSKA LINIJA, krivulja koja najkraćim putem spaja dvije tačke na plohi. U ravnini su pravci geodetske linije, na kuglinoj plohi to su glavne kružnice (v. Kugla).

GEOMETRIJA, grana matematike koja se bavi proučavanjem oblika, veličine i položaja *geometrijskih likova* kao i odnosa među njima. Bavi se zatim mjerenjem, izračunavanjima i konstrukcijom tih likova. Geometrija se dijeli na *planimetriju* (geometriju ravnine) i *stereometriju* (geometriju u prostoru). Geometrija se razvila iz praktičnih potreba pri izmjeravanjima zemljišta i izgradnji različitih objekata. U prvim počecima obrađivani su u geometriji pojedinačni konkretni problemi bez neke međusobne veze, kasnije se znanje sređuje i g. se postepeno razvija u nauku. Najstarija egipatska računica, tzv. *Ahmesova računica,* sadrži mnogo naputaka kako se izračunavaju površine nekih likova i volumeni nekih geom. tijela. Grčki matematičar Proklo (oko 450. pr. n. e.) pripovijeda da je *Tales* iz Mileta (oko 625—545. pr. n. e.), jedan od sedam grčkih mudraca, bio u Egiptu i odande prenio u Grčku matematičko znanje tadašnjeg vremena. Poslije njega se ističe znameniti grčki filozof i matematičar *Pitagora,* koji je sa svojim učenicima razvio geometriju do prave nauke. Učenje Pitagore i njegovih nasljednika nastavlja *Platon* u svojoj Akademiji. U aleksandrijskoj školi izučavale su se sve nauke, naročito filozofija i matematika. Tu je školu osnovao *Euklid* (oko 300. pr. n. e.). On povezuje sve dotadašnje znanje iz geometrije u strogo jedinstvenu cjelinu i svojim djelom postavlja naučne temelje geometrije, na kojima ona i danas počiva. Geometriju je mnogo unaprijedio svojim djelima *Arhimed,* najsvestraniji i najgenijalniji matematičar i fizičar staroga vijeka. Glasovit je i grčki geometričar *Apolonij*

iz Perge. Njegovo djelo *»Presjeci stošca«* vrhunac je tadašnje planimetrije.

Već u starom vijeku primjenom računskih operacija nastaje *trigonometrija.* U XVII st. primjenom algebre i uvođenjem koordinatnog sistema (v. Descartes) razvija se *analitička geometrija,* a potkraj XVIII st. na temelju metoda projiciranja (Gaspard Monge, 1746—1818) razvija se *deskriptivna geometrija,* koja proučava prostorne likove pomoću njihovih projekcija u ravnini. U XIX st. dolazi do naglog razvoja dotadašnjih disciplina i do stvaranja novih. Primjenom infinitezimalnog računa na analitičku geometriju razvija se *diferencijalna geometrija.* Za razvoj geometrije važni su radovi N. I. Lobačevskog, F. Bolyaia i B. Riemanna, koji su prodrijevši duboko u osnove i u *aksiomatiku* (v. Aksiom) geometrije otkrili nove *neeuklidske geometrije.* Pored svih tih geometrija, koje imaju izrazito metrički karakter, jer u njihovim osnovnim istraživanjima leži mjerenje dužine, kuta, površine i obujma, razvila se *projektivna geometrija,* koja proučava ona svojstva geometrijskih likova koja se projiciranjem ne mijenjaju. Pod utjecajem razvoja savremene algebre i teorije invarijanata razvila se nova *algebarska geometrija.* Njemački matematičar H. Grassmann (1809—1877) postavlja god. 1884. temelje *višedimenzionalne geometrije.* U posljednje vrijeme razvija se *topologija,* grana geometrije koja se pri istraživanju geometrijskih likova ne obazire na njihovu veličinu ni na njihova projektivna svojstva, nego istražuje njihova kvalitetna svojstva s obzirom na geometrijsku strukturu.

Geometrija se još dijeli na *elementarnu* i na *višu geometriju*. Elementarnoj geometriji pripadaju: planimetrija, stereometrija, trigonometrija, osnovi deskriptivne i analitičke geometrije. Ostali dijelovi geometrijskih istraživanja pripadaju višoj geometriji.

G. se razvila u veliku i važnu nauku koja je u temelju današnjih prirodnih i tehničkih nauka.

GEOMETRIJA RAVNALA, proučava metode pomoću kojih se ravni geometrijski likovi mogu konstruirati samo uz pomoć ravnala. Prve takve konstrukcije izveo je švicarski matematičar *J. Lambert.*

GEOMETRIJA ŠESTARA, proučava metode pomoću kojih se ravni geometrijski likovi mogu konstruirati samo uz pomoć jednog šestara. To su tzv. *Mascheronijeve konstrukcije,* prema talijanskom matematičaru. L. Mascheroniju, koji ih je prvi izvodio (1797).

GEOMETRIJSKA PROPORCIONALA, (četvrta), dužina x koja s obzirom na tri zadane dužine a, b, c zadovoljava razmjer $a : b = c : x$ (v. Razmjeri).

GEOMETRIJSKA SREDINA, kvadratni korijen produkta dvaju pozitivnih brojeva a i b, tj. $\sqrt{ab}$; a geometrijska sredina pozitivnih brojeva a_1, a_2, . . . , a_n je $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$

GEOMETRIJSKE KONSTRUKCIJE, postupci kojima se izvode geometrijski crteži pomoću geometrijskog pribora. Ako se traži da se nacrta lik prema

zadanim uvjetima, onda se takav zadatak zove *konstruktivni zadatak.* Kod konstruktivnog zadatka se razlikuje: *analiza; konstrukcija; dokaz; determinacija* ili *diskusija.* Izvodi li se takav zadatak upotrebom ravnala i šestara, konstrukcija se zove *klasična.* Služi li se još i drugim pomagalima, konstrukcija je *tehnička.* Klasična konstrukcija osniva se na ovih pet osnovnih zadataka: dvije tačke spojiti pravcem; odrediti presjek dvaju pravaca; oko zadane tačke u ravnini opisati kružnicu; odrediti presjek pravca i kružnice; odrediti presjek dviju kružnica. Općenito se klasičnom geometrijskom konstrukcijom mogu riješiti svi konstruktivni zadaci i problemi koji se algebarski svode najviše na kvadratnu jednadžbu.

Konstrukcije koje se odnose na računske operacije.

Zbrajanje i oduzimanje dužina. Dvije se dužine zbrajaju ili oduzimaju tako da se krajnja tačka jedne dužine pokrije početnom tačkom druge dužine, pa se pri zbrajanju nanese druga dužina na produženje prve, a pri oduzimanju druga na prvu. Tada je zbroj ili razlika tih dviju dužina ona dužina između početne tačke prve i krajnje tačke druge dužine. Ova je konstrukcija temelj cijele konstruktivne geometrije. Pri oduzimanju može doći i do novog pojma dužine, naime do negativnih dužina.

Množenje i dijeljenje dužina, osniva se na konstrukciji četvrte geometrijske proporcionale (x) između triju zadanih dužina: a, b, c. Naime, na jednom kraku kuta odmjere se počevši od vrha dužine

a i b, a na drugom dužina c, pa se međašna tačka dužine a i b spoji s krajnjom tačkom dužine c. Zatim se povuče prema ovoj spojnici paralela krajnjom tačkom dužine b. Tražena dužina x je na drugom kraku između krajnje tačke dužine c i sjecišta one paralele s drugim krakom. Dužina x zadovoljava razmjer $a : b = c : x$. Ova konstrukcija dovodi do dužine $x = \frac{bc}{a}$, koja je jednaka produktu dviju dužina podijeljenom trećom dužinom. Posebni su slučajevi:

ako je $a = 1$, onda je $x = bc$, tj. produkt dviju dužina,

ako je $a = 1$ i $c = b$, onda $x = b^2$, tj. kvadrat dužine,

ako je $c = 1$, onda je $x = \frac{b}{a}$, tj. kvocijent dviju dužina,

ako je $b = c = 1$, onda je $x = \frac{1}{a}$, tj. recipročna dužina.

Potenciranje dužine: $x = a^n$ izvodi se uzastopnom primjenom konstrukcije $x = bc$, gdje $b = c = a$.

Traženje drugog korijena osniva se na konstrukciji srednje geometrijske proporcionale (x) između zadanih dužina a i b. Konstrukcija je ista kao pri pretvaranju pravokutnika u kvadrat (v. dalje). Tu je površina pravokutnika ab, a površina kvadrata x^2, pa je $x^2 = ab$, a tražena dužina $x = \sqrt{ab}$ je stranica ovog kvadrata. Uzme li se da je jedna od zadanih dužina npr. $b = 1$, onda je $x = \sqrt{a}$.

Konstrukcije koje se odnose na dužinu.

Raspoloviti dužinu AB ili naći simetralu dužine AB. Iz krajnjih tačaka *A* i *B* opišu se lukovi s istim polumjerom većim od polovine dužine. Spojnica presjecišta lukova *C* i *D* siječe dužinu *AB* u tački *S*, koja je polovište dužine *AB*. Ta spojnica je ujedno i simetrala dužine.

Podijeliti zadanu dužinu na n jednakih dijelova. 1) Jednom krajnjom tačkom zadane dužine povuče se pomoćni pravac i na njemu, počevši od iste krajnje tačke, nanese *n* međusobno jednakih odsječaka. Zatim se krajnja tačka zadnjeg odsječka spoji s drugom krajnjom tačkom zadane dužine, pa se zatim svim djelištima na pomoćnom pravcu povuku paralele prema onoj spojnici. Ove paralele dijele zadanu dužinu na *n* jednakih dijelova. 2) Povuče se pravac *CD* paralelan sa zadanom dužinom i na njemu se odmjeri *n* jednakih segmenata. Povuče se pravac *AC* i *BD*. Iz njihova presjecišta *S* vuku se pravci kroz djelišne tačke na pravcu *CD*. Ti pravci sijeku dužinu *AB* u traženim djelišnim tačkama.

Podijeliti zadanu dužinu na proporcionalne segmente u omjeru m : n. Rješava se kao prethodni zadatak 2), samo se na *CD* prenesu segmenti *m* i *n*. Analogan je postupak ako zadanu dužinu treba podijeliti u više dijelova, koji se odnose kao *a* : *b* : *c*: ....

Konstrukcije koje se odnose na kut.

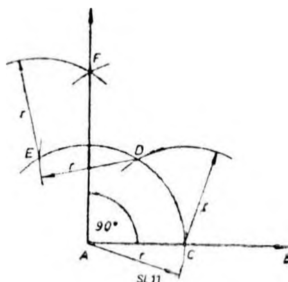
Prenijeti zadani kut (∢ ABC) u zadani vrh (V) na danom kraku (MN). Iz vrha B opiše se luk po volji uzetog polumjera, koji siječe krakove u tački *P* i *Q*. Istim otvorom šestara opiše se iz zadanog

vrha *V* luk. Iz tačke u kojoj taj luk siječe pravac *MN* opiše se luk polumjera jednakog *PQ*. Dobije se presjecište *S* koje se spoji sa *V*. Spojnica *SV* je drugi krak traženog kuta. Na tom se zasniva grafičko zbrajanje i oduzimanje kutova.

Raspoloviti kut ili naći simetralu kuta ABC (v. Simetrija). Iz vrha *B* opiše se luk koji siječe krak *AB* u *P* i krak *BC* u *Q*. Iz *P* i iz *Q* opišu se lukovi jednakih polumjera. Njihovo je sjecište *S*. Spojnica *BS* je simetrala kuta.

Konstruirati kut od 60⁰ i 30⁰. Iz vrha *A* u početnoj tački zrake opiše se luk po volji uzetog polumjera *AB*, iz *B* se opiše luk istog polumjera. Presjecište *C* spoji se sa *A*, i to je drugi krak kuta od 60⁰. Ako se taj kut raspolovi, dobije se kut od 30⁰.

Konstruirati kut od 90⁰ i 45⁰. Na zraci *AB* (krak kuta) iz *A* se opiše s polumjerom *r* luk (sl. 11), koji siječe zraku u *C*. Iz *C* se opiše luk (s istim *r*) koji

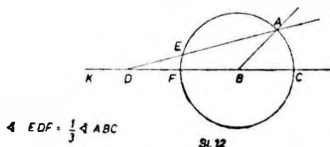


Sl. 11

siječe prvi luk u *D*. Iz *D* opet istim *r* luk koji siječe prvi luk u *E*. Iz *E* luk siječe luk opisan iz *D* u

F. Zraka *AF* je drugi krak kuta od 90°. Ako se taj kut raspolovi dobije se kut od 45°.

Podijeliti zadani kut ABC na tri jednaka dijela (trisekcija kuta). Ova se konstrukcija ne može izvesti samo ravnalom i šestarom, ali se može približno izvesti pomoću ravnala s centimetarskom podjelom ovako: polumjerom *BC* opiše se iz *B* kružnica (sl. 12). Produži li se *BC* preko *B*, dobije se

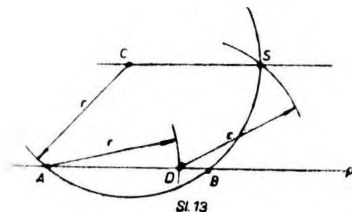


Sl. 12

pravac *CK*. Sada se postavi početak ravnala u *A* tako da prolazi tačkom *B* i okreće se oko *A* sve dotle dok segment *ED* između kružnice i pravca *CK* ne bude jednak polumjeru *BC*. Tada je kut *EDF* trećina kuta *ABC*.

Konstrukcije koje se odnose na paralele i okomice.

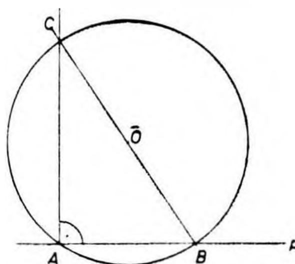
Danom tačkom C povući paralelu prema zadanom pravcu p. Otvorom šestara opiše se iz *C* kružnica



Sl. 13

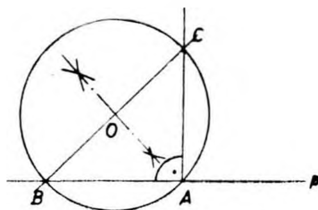
koja siječe pravac *p* u *A* i *B* (sl. 13). Istim otvorom šestara iz presjecišta *A* prenese se na *p* segment *AD* = *AC*. Istim otvorom se iz tačke *D* opiše luk koji siječe kružnicu iz *C* u *S*. Spoji li se *S* sa zadanom tačkom *C*, tada je *CS* tražena paralela.

Uzdići okomicu na pravac p u zadanoj tački A na pravcu. Iz proizvoljne tačke *O* izvan pravca opiše se kružnica polumjera *OA* (sl. 14). Drugim presje-



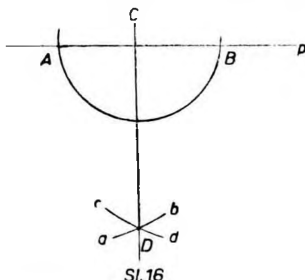
Sl. 14

cištem *B* pravca i kružnice povuče se promjer *BO*, koji siječe kružnicu u *C*. Spojivši tačke *C* i *A* dobije se okomica *AC*.



Sl. 15

Spustiti okomicu iz zadane tačke C na pravac p. Iz *C* se povuče kosa dužina *CB* (sl. 15). Iz njene sredine *O* opiše se kružnica polumjera *OB*. Ta kružnica siječe *p* u tački *A*, koja je nožište okomice *CA*. Napomena: ako je *C* blizu pravca, bolje je raditi ovako: iz *C* kao središta opiše se luk koji siječe *p* u *A* i *B* (sl. 16). Iz *A* i *B* kao središta opišu se dva



Sl. 16

luka *ab* i *cd* (istim otvorom šestara), koji se sijeku u tački *D*. Povuče li se *CD*, dobije se tražena okomica.

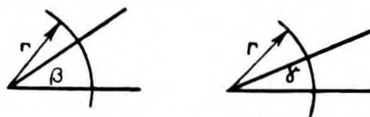
Konstrukcije koje se odnose na trokut.

Da bi se mogao konstruirati trokut, moraju biti zadana tri nezavisna elementa. Jednakokračan trokut i pravokutan trokut određeni su sa dva nezavisna elementa, jednakostraničan samo s jednim nezavisnim elementom (dužinom).

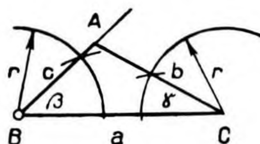
Prva konstrukcija (zadana stranica i dva kuta) (sl. 17).

Druga konstrukcija (zadane dvije stranice i kut među njima) (sl. 18).

ZADANO: a

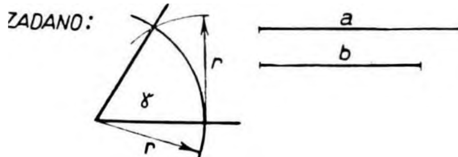


KONSTRUKCIJA:

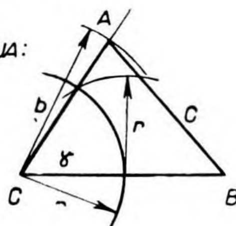


Sl. 17

ZADANO:

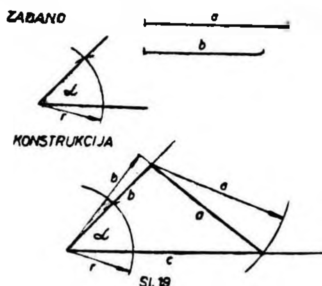


KONSTRUKCIJA:



Sl. 18

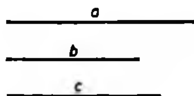
Treća konstrukcija (zadane dvije stranice i kut nasuprot većoj) (sl. 19).



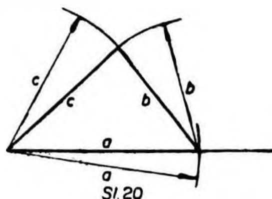
Sl. 19

Četvrta konstrukcija (zadane sve tri stranice; $a > b$, $a > c$, $a < b + c$. Ako bi bilo $a > b + c$, nema rješenja) (sl. 20).

ZADANO



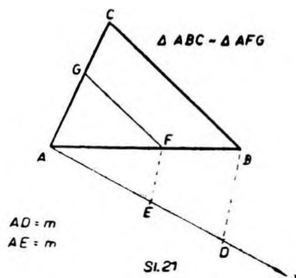
KONSTRUKCIJA



Sl. 20

Podijeliti trokut na n jednakih dijelova pravcima povučenim iz jednog vrha. Stranica nasuprot tome vrhu podijeli se na n jednakih dijelova, pa se zatim iz toga vrha povuku dužine do svakog djelišta.

Nacrtati trokutu ABC sličan trokut AFG, tako da je omjer $k = \frac{m}{n}$. Povuče se iz vrha A zraka AX i na njoj nanese $AD = m$ i $AE = n$. Spoji se B sa D i vuče kroz E paralela EF. Iz F vuče se FG paralelno sa BC (sl. 21).



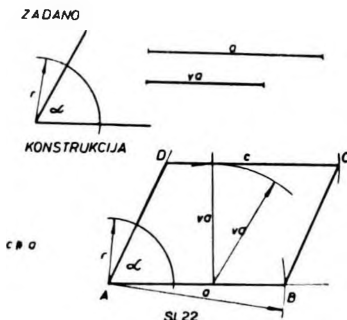
Sl. 21

$$\text{Tada je } k = \frac{m}{n} = \frac{AD}{AE} = \frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AG} = \frac{BC}{FG}$$

Konstrukcije koje se odnose na četverokut.

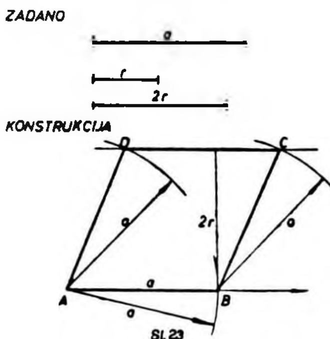
Konstruirati paralelogram, ako su zadane stranice a i b, i kut među njima α. Nacrta se kut α i na njegovim kracima nanesu se stranice a i b. Dobiju se tačke B i D. Iz B se opiše luk polumjera b, a iz D luk polumjera a. Presjecište ovih lukova je četvrti vrh traženog paralelograma.

Konstruirati romboid, ako je zadana osnovica (a), kut (α) i visina na osnovicu (v_a) (sl. 22).



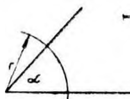
Sl 22

Konstruirati romb, ako je zadana stranica i polumjer upisane kružnice (sl. 23).

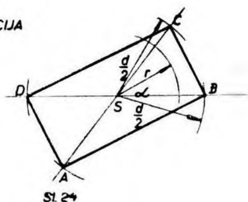


Sl 23

Konstruirati pravokutnik, ako je zadana dijagonala i kut između dijagonala (sl. 24).



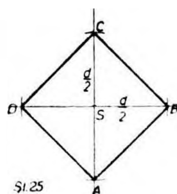




Sl. 24

Konstruirati kvadrat, ako je zadana dijagonala (sl. 25).

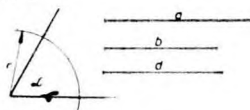




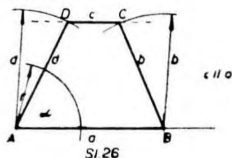
Sl. 25

Konstruirati trapez, ako je zadana osnovica *a* i oba kraka *b* i *d,* i kut α (sl. 26).

ZADANO



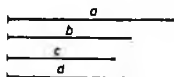
KONSTRUKCIJA

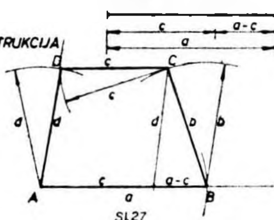


Sl. 26

Konstruirati trapez, ako su zadane sve četiri stranice (sl. 27).

ZADANO

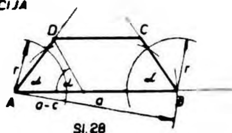




Sl. 27

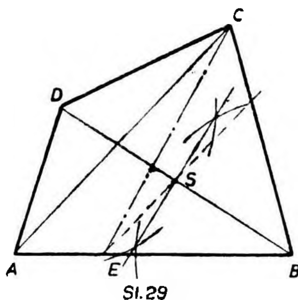
Konstruirati jednakokračan trapez, ako su zadane osnovice a i c, i kut α (sl. 28).





Sl. 28

Podijeliti trapezoid na dva jednaka dijela pravcem iz jednog vrha. Raspolovi se dijagonala nasuprot uzetom vrhu, pa se tim polovištem povuče paralela prema drugoj dijagonali (sl. 29). Sjecište ove paralele i stranice četverokuta, kojoj ne pripada uzeti vrh, jest tražena tačka, pa se od uzetog vrha povuče dužina do ove tačke.



Sl. 29

Konstrukcija u vezi s pretvaranjem likova.

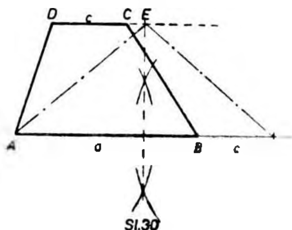
Pretvoriti jedan lik u drugi znači nacrtati drugi lik jednake površine.

Pretvoriti trokut u paralelogram. Povuče se pravac sredinom dviju stranica, pa se jednim ili drugim vrhom treće stranice povuče paralela prema suprotnoj stranici.

Pretvoriti paralelogram u pravokutnik. Povuku se iz dva vrha paralelograma okomice na suprotnu stranicu, odnosno njeno produženje.

Pretvoriti pravokutnik u kvadrat. Jedna od dviju susjednih stranica pravokutnika produži se za dužinu druge susjedne stranice, pa se zatim nacrta kružnica kojoj je tako produžena dužina promjer. Ova kružnica siječe onu drugu susjednu stranicu (ili njeno produženje), tada je udaljenost od ovog sjecišta do promjera tražena stranica kvadrata.

Trapez pretvoriti u jednakokračan trokut (sl. 30).



Sl.30

Pretvoriti n-terokut u (n-1)-terokut. Uzmu se ma koja tri susjedna vrha *n*-terokuta (označe se: prvi, drugi i treći), pa se povuče dijagonala, koja spaja

prvi i treći vrh, a drugim se vrhom povuče paralela onoj dijagonali. Zatim se preko jedne krajnje tačke dijagonale produži ona stranica n-terokuta kojoj ne pripada drugi vrh, sve do sjecišta s onom paralelom, pa se ovo sjecište spoji s drugom krajnjom tačkom dijagonale. Postepenim pretvaranjem može se svaki n-terokut pretvoriti u kvadrat, i tako se konstruktivnim putem nađe kvadratura svakog mnogokuta.

Konstrukcije u vezi s kružnicom.

Dvjema zadanim tačkama A i B povući kružnicu zadanog polumjera r. Iz tačaka A i B kao središta opišu se polumjerom r lukovi ab i cd. Njihovo presjecište je središte tražene kružnice.

Trima zadanim tačkama A, B, C (koje ne leže na jednom pravcu) *položiti kružnicu.* Središte kružnice je presjecište dviju simetrala dužina, npr. AB i BC.

Naći središte zadanog luka kružnice. Na luku se izaberu tri tačke. Zatim se postupa kao u prethodnom primjeru.

Raspoloviti dani luk kružnice. Krajevi luka spoje se tetivom. Simetrala ove tetive raspolavlja dani luk.

Naći geometrijsko mjesto tačaka iz kojih se dana dužina AB vidi pod danim kutom α. Traženo mjesto jesu dva luka jednakih kružnica koji prolaze tačkama A i B sa suprotnih strana dužine. (Tačke A i B ne pripadaju skupu.) Središta tih lukova nađu se pomoću okomica u tačkama A i B. Konstruira se kut α u B prema okomici u toj tački kao kraku. Drugi krak siječe okomicu podignutu u A u tački C.

Središte dužine *BC* je središte jednog od traženih lukova. Na suprotnoj strani dužine *AB* konstruira se istim načinom i drugi luk.

Iz zadane tačke A povući tangentu na zadanu kružnicu. Ako je tačka *A* na kružnici, povuče se u njoj okomica na polumjer *OA*, i ona je tangenta. Ako je tačka *A* izvan kružnice, polovište dužine *OA* je središte kružnice koja prolazi središtem *O* i siječe zadanu kružnicu u dvije tačke *B* i *C*. Spojnice tačke *A* s tim dvjema tačkama daju tražene tangente.

Povući na zadane dvije kružnice zajedničke vanjske tangente. Ako su polumjeri zadanih kružnica jednaki, središtima *A* i *B* povuku se dijametri okomito na spojnicu središta. Spojnice krajeva dijametara jesu tražene dvije tangente Ako polumjeri nisu jednaki: $R > r$, onda se iz središta veće kružnice opiše kružnica polumjera $r_1 = R - r$. Na tu kružnicu povuku se tangente iz središta manje kružnice prema prethodnom postupku. Središte veće kružnice spoji se sa ta dva dirališta i produži do presjeka s većom kružnicom. Iz središta manje zadane kružnice povuku se okomice na tangente položene iz njega na pomoćnu kružnicu ($r_1 = R - r$). Tako dobivena presjecišta na manjoj kružnici spoje se s presjecištima na većoj kružnici. Dobiju se dvije tangente.

Povući na zadane dvije kružnice (R i r) zajedničke nutarnje tangente. Iz središta *A* veće kružnice (*R*) opiše se kružnica polumjera $R + r$. Iz središta

B manje kružnice povuku se pomoćne tangente na pomoćnu kružnicu. Dirališta (C i C_1) spoje se sa središtem A. Te spojnice sijeku kružnicu (A) u presjecištima D i D_1, a iz središta B manje kružnice povuku se polumjeri okomiti na te pomoćne tangente. Njihovi krajevi su dirališta (E i E_1), pa je DE jedna a D_1E_1 druga nutarnja tangenta na zadane kružnice.

Opisati kružnicu zadanome trokutu ABC. Nađe se presjecište simetrala stranica trokuta, i ono je središte opisane kružnice.

Upisati kružnicu zadanome trokutu ABC. Nađe se presjecište simetrala kuta (dosta su dvije) i iz njega se spusti okomica na jednu stranicu. Ona je polumjer upisane kružnice koja dodiruje sve tri stranice trokuta.

Opisati kružnicu zadanome pravokutniku (ili kvadratu). Presjecište dijagonala je središte tražene kružnice, s polumjerom jednakim dužini koja spaja to središte s bilo kojim vrhom. Napomena: kosokutnom paralelogramu ne može se opisati kružnica.

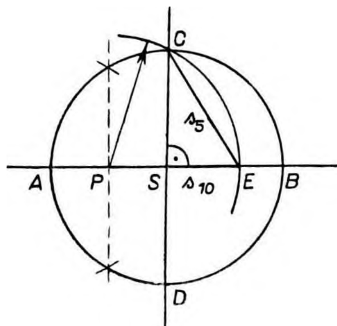
Upisati kružnicu rombu (ili kvadratu). Iz presjecišta dijagonala spusti se okomica na jednu stranicu. Dužina te okomice je polumjer tražene kružnice.

Opisati kružnicu zadanom pravilnom poligonu. Ako je broj stranica paran, dvije spojnice dva suprotna vrha svojim presjecištem određuju središte. Dužina od središta do vrha je polumjer. Ako je broj stranica neparan, onda se iz dvaju vrhova spuštaju

okomice na suprotne stranice. Njihovo presjecište je središte opisane kružnice.

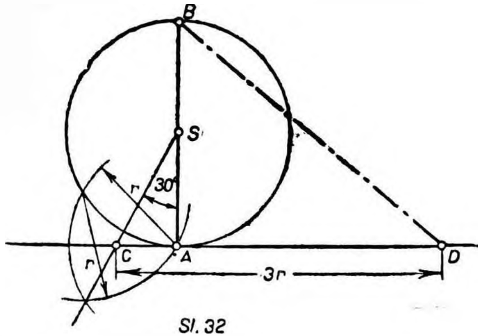
Upisati kružnicu zadanome pravilnom poligonu. Središte se nađe kao u prethodnom primjeru. Okomica spuštena iz središta na stranicu je polumjer.

Upisati u zadanu kružnicu pravilan peterokut (odnosno *deseterokut*). $CD \perp AB$, $SP = \frac{r}{2}$. Iz P luk polumjera PC; sjecište je tačka E. Tada je $SE = s_{10}$, a $CE = s_5$ (sl. 31).



Sl. 31

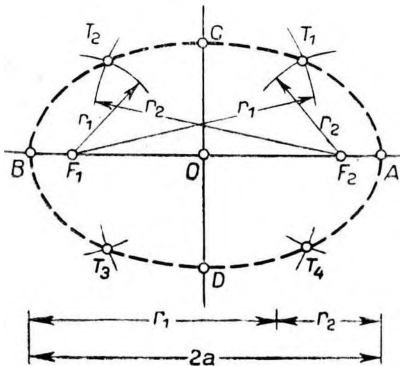
Približna konstrukcija broja π (ili opsega kruga), (poljski matematičar *A. Kohanski, 1685*). $AB = 2r$, u A tangenta t, središnji kut $ASC = 30^0$, $CD = 3r$, tada je BD = polovina opsega kruga; daje $\pi = 3{,}1415\ldots$ (sl. 32).



Sl. 32

Konstrukcija elipse

Ako su zadani fokusi F_1 i F_2 i dužina $2a$ (velika os), može se na osnovi definicije elipse konstruirati

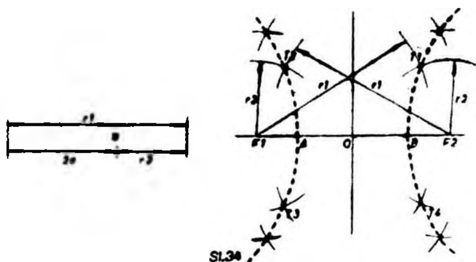


Sl. 33

elipsa tačku po tačku pomoću šestara tako da se oko fokusa F_1 i F_2 kao središta opišu lukovi s polumjerom r_1, $(a - e \leq r_1 \leq a + e)$, zatim iz fokusa F_2 i F_1 s polumjerom $r_2 = 2a - r_1$ drugi lukovi. Sjecište tih lukova daju 4 tačke elipse. Ponavljanjem te konstrukcije može se odrediti koliko se želi tačaka elipse (sl. 33).

Konstrukcija hiperbole

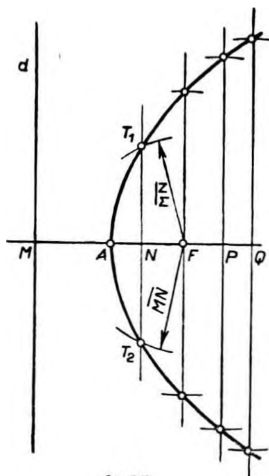
Ako su zadani fokusi F_1 i F_2 i dužina $2a$ (glavna os), može se na osnovi definicije hiperbole konstruirati hiperbola tačku po tačku tako da se uzme u šestar dužina $r_1 \geq a + e$ i s tom dužinom se opiše oko svakog žarišta luk, pa se zatim s polumjerom $r_2 = r_1 - 2a$ opišu opet oko svakog fokusa lukovi. Presjecišta tih lukova daju 4 tačke hiperbole. Ponavljanjem tog postupka može se dobiti koliko se želi tačaka hiperbole (sl. 34).



Konstrukcija parabole

Ako je zadana *ravnalica d* parabole i *fokus F*, povuče se najprije tačkom *F* okomica *FM* na *d*.

Na pravcu *FM* odabere se po volji tačka *N*. Tom tačkom se povuče okomica na *FM*, zatim se u šestar uzme dužina *MN* i tom dužinom opiše se luk oko *F* dok ne siječe okomicu u *N*. Tako se dobiju 2 tačke parabole. Daljnjim postupkom u tački *P* dobiju se još dvije tačke, itd., dobije se po volji mnogo tačaka parabole (sl. 35).



Sl. 35

GEOMETRIJSKI ELEMENTI, jesu tačka, crta, ploha. Oni mogu nastati ili gibanjem nižeg elementa počevši od tačke, ili niži element može nastati presijecanjem, odnosno kao međa viših elemenata.

Tačka kao geometrijski element nema definicije, ili se definira kao međa (početna ili završna tačka npr. dužine), ili kao presjecište dviju crta ili triju ploha. Tačke se u ravnini označuju znacima: +, *, · , °, a obilježavaju se obično velikim latinskim slovima. Prostor je skup beskonačno mnogo tačaka.

Crta, pravac. Giba li se tačka u prostoru, ona izvodi kao trag *crtu*; crta je međa ili presjecište dviju ploha. Crta je neprekidan niz tačaka, skup beskonačno mnogo tačaka. Razlikuju se: *ravna crta* i *zakrivljena crta* (v. Krivulja). Neomeđena ravna crta zove se *pravac*. Obilježava se obično malim latinskim slovom. Pravac je potpuno određen dvjema tačkama, ili dvjema tačkama može se položiti samo jedan pravac. To je *aksiom o pravcu.* Na svakom pravcu postoje s obzirom na jednu tačku na njemu dva različita smjera gibanja. Ti su *smjerovi suprotni.* Budući da se tom gibanju ne može zamisliti kraj, kaže se: pravac je neomeđen u oba smjera gibanja, tj. na obje strane. Tačka koja leži na pravcu dijeli pravac na dvije *zrake.* Dio pravca omeđen dvjema tačkama zove se *dužina,* a predstavlja najkraću spojnicu između tih tačaka. Zato se kaže: pravac nastaje produženjem dužine na obje strane. Dužina se obično obilježava sa dva velika slova na krajevima ili malim slovom u sredini. Od dovoljnog broja kraćih dužina može se uvijek sastaviti po volji velika dužina.

Ploha, ravnina. Giba li se crta mijenjajući svoj položaj u prostoru, ona izvodi *plohu,* pa je i svaka ploha skup beskonačno mnogo tačaka. Dijele se na

ravne i *zakrivljene plohe.* Neomeđena ravna ploha zove se *ravnina.* Ravnina se prikazuje omeđenim dijelom, koji ima oblik paralelograma. Ravnina se obilježava velikim slovima alfabeta Npr. Γ (gama), Λ (delta), Π (pi), itd. Ravnina kao jedan od osnovnih geom. elemenata ima svojstvo: ako se u ravnini odaberu po volji dvije tačke, a zatim se spoje pravcem, onda taj pravac leži posve u toj ravnini. Jednom tačkom može se položiti u prostoru po volji mnogo ravnina.

Slijede teoremi: 1) trima tačkama u prostoru, koje ne leže na jednom te istom pravcu, može se položiti jedna i samo jedna ravnina; ili ovako: tri tačke koje ne leže na jednom te istom pravcu jednoznačno određuju ravninu u prostoru. Odatle slijedi da je ravnina također određena: 2) pravcem i jednom tačkom izvan njega; 3) dvama ukrštenim pravcima; 4) dvama paralelnim pravcima.

Posebni položaji u prostoru. *Ravnina* se zove *vodoravna* ili *horizontalna* ako ima položaj razine mirne vode. Svaki pravac koji leži u horizontalnoj ravnini zove se *vodoravan* ili *horizontalan pravac.* Svaki pravac koji ima u prostoru položaj kao nit mirnog viska zove se *uspravan* ili *vertikalan pravac.* Svaka ravnina koja prolazi vertikalnim pravcem zove se *uspravna* ili *vertikalna ravnina.* Pravci i ravnine u prostoru koji nisu ni horizontalni ni vertikalni imaju *kosi položaj.* Horizontalnim pravcem može se položiti jedna horizontalna i jedna vertikalna ravnina. Vertikalnim pravcem može se položiti koliko se želi vertikalnih ravnina.

Tijelo, lik. Giba li se ploha mijenjajući svoj položaj u prostoru, ona izvodi *geometrijsko tijelo*, pa je i tijelo skup beskonačno mnogo tačaka. Dvije susjedne plohe na tijelu imaju zajedničku među koja se zove *brid*. Općenito, sastav ili skup geom. elemenata zove se zajedničkim imenom *geometrijski lik*.

Međusobni odnosi tačaka, pravaca i ravnina.

Tačka i pravac. Tačka s obzirom na pravac može imati dva položaja: može ležati na pravcu, ili može biti izvan pravca. Ako pravac p prolazi tačkom T, kaže se da tačka T leži na pravcu p, ili T je element skupa tačaka pravca p. Ako je tačka izvan pravca, onda se pod *udaljenošću tačke od pravca* razumijeva duljina okomice povučene od tačke do pravca.

Tačka i ravnina. Tačka s obzirom na ravninu može imati dva različita položaja: može ležati u ravnini, ili može biti izvan ravnine. Ravnina zbog svoje neomeđenosti dijeli tačke prostora na dva skupa, koji se nalaze na suprotnim stranama ravnine. Okomica je najkraća spojnica među svim dužinama koje se mogu povući od tačke do ravnine. Duljina te okomice zove se *udaljenost tačke od ravnine.*

Pravci u ravnini. Skup svih pravaca u ravnini koji prolaze jednom te istom tačkom zove se *pramen pravaca.* Zajednička tačka zove se *vrh pramena.* Ako dva pravca (a i b) imaju jednu tačku (T) zajedničku, kaže se da se oni *sijeku* u tački T, koja se zove *sjecište* ili *presjecište*. Pravci a i b su

ukršteni. Ako dva pravca imaju dvije različite tačke zajedničke, moraju imati i sve ostale tačke zajedničke; to su *koincidentni* pravci. Piše se $a \equiv b$, i čita se: »a identično b«. Ako se dva pravca sijeku pod pravim kutom (v. Kut), kaže se da su međusobno *okomiti* ili *normalni.* U ravnini se može u jednoj tački pravca povući samo jedna okomica. Crtanje okomice (v. Geometrijske konstrukcije). Za dva ukrštena pravca koji nisu međusobno okomiti kaže se da su *međusobno kosi.* Dva pravca u ravnini koji nemaju zajedničkih tačaka (koji se ne sijeku) zovu se *usporedni* ili *paralelni* pravci (paralele). Ako je pravac a paralelan sa b piše se: $a \parallel b$. Crtanje paralela (v. Geometrijske konstrukcije). Dio ravnine između dva usporedna pravca zove se *pruga. Aksiom o paralelama:* svakom tačkom izvan zadanog pravca može se u ravnini povući samo jedna paralela. Ako je u ravnini jedan pravac usporedan s drugim, a drugi s trećim, onda je i prvi usporedan s trećim. Ako pravac ima dvije tačke zajedničke s ravninom, on leži potpuno u toj ravnini. Pravac u ravnini dijeli ravninu na dva dijela, na dvije *poluravnine.* Ako pravac pripada jednoj poluravnini, govori se o *zatvorenoj poluravnini.*

Pravci u prostoru. Pravci u prostoru koji leže u jednoj te istoj ravnini zovu se *komplanarni.* Dva pravca u prostoru mogu imati tri različita položaja: mogu biti *ukršteni* (kada oba leže u istoj ravnini i sijeku se), *usporedni* ili *paralelni* (leže u istoj ravnini, ali se ne sijeku), *mimoilazni* ili *mimosmjerni* (kada se ne sijeku i ne leže u jednoj te istoj ravnini). Pravac koji spaja dvije tačke s različitih strana

ravnine ima jednu tačku zajedničku s ravninom, pa se kaže da pravac probada ravninu u jednoj tački koja se zove *probodište.* Pravac p je okomit na ravninu Π, ili ravnina Π je okomita na pravac p, ako je pravac okomit na sve pravce ravnine koji prolaze njegovim probodištem. Taj se pravac zove *okomica* ili *normala.* Piše se: $p \perp \Pi$ ili $\Pi \perp p$. Da se pokaže da je pravac okomit na ravnini, dovoljno je pokazati da je okomit na dva pravca u toj ravnini koja prolaze njegovim probodištem (nožištem). Sve okomice na ravninu međusobno jesu usporedne. Svakom tačkom ravnine prolazi samo jedan pravac koji je okomit na toj ravnini. Iz tačke izvan ravnine može se položiti samo jedan pravac koji je okomit na tu ravninu. Ako pravac probada ravninu, a nije okomit na njoj, on je *kos prema ravnini.* Ako pravac ne probada ravninu i ne leži u ravnini, kaže se da je *usporedan* ili *paralelan s ravninom* (nema s njom nijedne zajedničke tačke). Ako je pravac usporedan s nekim pravcem ravnine, on je usporedan s tom ravninom. Jednom tačkom izvan ravnine može se povući beskonačno mnogo pravaca usporednih s tom ravninom. Jednom tačkom izvan ravnine prolazi samo jedna ravnina koja je s njom usporedna. Ako je pravac usporedan s ravninom, onda svaka ravnina (osim jedne) koja prolazi tim pravcem siječe ravninu u jednom pravcu koji je usporedan s danim pravcem. Ako su dva pravca mimosmjerna, tada se jednim pravcem može položiti smo jedna ravnina koja je usporedna s drugim.

Međusobni položaj ravnina u prostoru. Ravnine mogu biti: ili *ukrštene ravnine,* ili *usporedne rav-*

nine. Dvije se ravnine zovu ukrštene ako imaju zajednički jedan pravac, ili drugačije, ako se sijeku. Ako dvije ravnine imaju zajedničku jednu tačku, one imaju zajednički i jedan pravac koji prolazi tom tačkom. Dvije poluravnine, koje izlaze iz pravca, čine *prostorni kut* ili *diedar.* Pravac se zove *brid,* a poluravnine *strane* tog diedra. Diedar može nastati okretanjem poluravnine oko pravca za usmjereni kut. Veličina diedra određuje se ovako: odabere se na bridu tačka, a zatim se u toj tački nacrta okomica u jednoj strani i druga okomica u drugoj strani. Kut između tih okomica zove se *prikloni kut* diedra. Ako je prikloni kut diedra pravi, poluravnine su okomite. Dvije ukrštene ravnine dijele tačke prostora na 4 dijela, tj. 4 diedra. Ako dvije ravnine imaju zajedničke tri tačke, koje ne leže sve na jednom te istom pravcu, imaju one i sve druge tačke zajedničke. To su *koincidentne ravnine.* Skup svih ravnina u prostoru, koje prolaze zadanim dvjema tačkama, zove se *svežanj* ili *svezak ravnina.* Spojnica zadanih dviju tačaka zove se *os svežnja.* Svakim pravcem u prostoru prolazi beskonačno mnogo ravnina koje čine svežanj. Skup svih ravnina u prostoru koje prolaze jednom te istom tačkom zove se *snop ravnina.* Zajednička tačka zove se *vrh snopa.* Dvije ravnine u prostoru, koje nemaju zajedničkih tačaka (one se ne sijeku), zovu se *usporedne* ili *paralelne ravnine.* Ukršteni pravci koji su usporedni sa zadanom ravninom određuju s njom usporednu ravninu. Ako se dvije usporedne ravnine presijeku trećom ravninom, presječnice su usporedne. Ako ravnina prolazi oko-

micom druge ravnine, onda su te dvije ravnine međusobno okomite. Ako je ravnina okomita na bilo koji pravac u drugoj ravnini, onda su te dvije ravnine međusobno okomite. Ako je jedna ravnina okomita na dvije ukrštene ravnine, onda je ona okomita i na presječnici tih ravnina.

GEOMETRIJSKI LIK (FIGURA), određeni sastav ili skup geometrijskih elemenata, odnosno njihovih dijelova. Ako su sve tačke geom. lika u jednoj te istoj ravnini, lik se zove *ravan geometrijski lik.* Lik kome sve tačke ne leže u jednoj te istoj ravnini zove se *prostoran geometrijski lik.* Potpuno omeđeni dio ravnine zove se *zatvoren* ravan geom. lik. Kod geom. likova promatraju se i određuju: *oblik, veličina* i *položaj.* Geom. likovi koji se podudaraju u veličini i obliku zovu se *sukladni (kongruentni)* likovi (v. Sukladnost). Ako likovi imaju samo jednake veličine, zovu se *jednaki* likovi (v. Jednakost likova). Imaju li likovi jednake oblike, ali različite veličine, zovu se *slični* (v. Sličnost).

GEOMETRIJSKI NIZ i RED, v. Niz; Redovi.

GEOMETRIJSKO CRTANJE, izvođenje crteža pomoću geometrijskog pribora. Da bi se dobila predodžba o izgledu predmeta, često se crta i njegova prostorna slika. Kako svaki predmet ima tri dimenzije, na njega se može gledati iz tri glavna smjera. Ti smjerovi daju: *tlocrt, nacrt* i *bokocrt* toga predmeta. Pravila za tehničko crtanje: pri crtanju pravaca koriste se različiti načini izvlačenja pravaca. Zadani dijelovi crtaju se punim crtama i srednje debljine, rezultati se crtaju deblje, ali još uočljivije

prekinuto, tako da se izmjenjuju kratki potezi i tačke. Nevidljivi dijelovi crtaju se isprekidano a manje važni pravci crticama ili nizom tačaka. Ako se želi napose istaći neki pravac, crtice se izmjenjuju sa po dvije tačke.

Geometrijsko crtanje označava crtanje geom. ravnih likova ili prostornih likova slikama u ravnini. Za takvo crtanje potreban je crtaći *pribor*, koji mora biti uvijek ispravan. Inače se pored urednosti traži i izvjestan stepen ljepote crteža. Pažnju valja posvetiti i crtanju slova. Pribor za crtanje: *daska* za crtanje; *papir* za crtanje; *trokuti* za crtanje; *ravnalo* (lineal); *dugo ravnalo* (rajšina); *olovke* (br. 3 i 4); *tuš; pero za izvlačenje* tušem; *šestar; krivuljar; kutomjer.*

GEOMETRIJSKO MJESTO, skup svih tačaka u ravnini ili prostoru koje zadovoljavaju neke određene iste geometrijske uvjete. Npr. kružnica je geom. mjesto tačaka u ravnini koje su jednako udaljene od jedne zadane čvrste tačke koja se zove središte.

GEOMETRIJSKO TIJELO, dio prostora koji ima određeni oblik, veličinu i položaj. Ili: geom. tijelo je dio prostora koji je omeđen sa svih strana. Geom. tijela predočuju se pomoću fizičkih tijela koja se zovu *modeli.* U ravnini se prikazuju *slikama.* Granice ili međe koje dijele tijelo od ostalog prostora zovu se *plohe,* koje mogu biti *ravne* ili *krive.* Ako je tijelo omeđeno samo ravnim plohama ili ravninama zove se *uglato tijelo* ili *poliedar.* Ako tijelo ima makar i jednu krivu plohu zove se *oblo tijelo. Bri-*

dom se zove presječnica dviju međašnjih ploha. Geom. tijela dijele se po obliku na: *prizme, valjke, piramide, stošce, kugle,* itd. Od ovih su prizma i piramida uglata tijela, a valjak, stožac i kugla obla tijela.

GETALDIĆ , Marin, matematičar (Dubrovnik, 1568—1626). Studirao u Rimu. Primjenjivao algebru na geometriju, te se ubraja među Descartesove prethodnike. Od 1603. do 1607. izdaje svojih pet matematičkih djela, a njegovo najveće djelo *»De resolutione et compositione mathematica«* (Rim, 1630) štampano je poslije njegove smrti. U njemu je općenito i konsekventno provedena metoda algebarskog rješavanja problema niže geometrije.

GLAVNA VELIČINA, v. Opći brojevi.

GONIOMETRIJA, dio trigonometrije u kojem se istražuju goniometrijske funkcije i njihovi odnosi. Danas se obično taj naziv ne upotrebljava (v. Trigonometrija).

GONIOMETRIJSKE FUNKCIJE, v. Trigonometrija.

GRAD, jedinica za mjerenje kutova u centezimalnom sistemu (v. Sistemi mjera).

GRADIJENT, vektor koji karakterizira promjenu neke veličine, koja u svakoj tački prostora ima određenu vrijednost. Gradijent je u svakoj tački plohe upravljen okomito na plohu koja prolazi tom tačkom, a po veličini je utoliko veći ukoliko se brže mijenja promatrana veličina, tj. ukoliko su gušće ekvipotencijalne plohe (plohe jednakog potencijala).

GRAFIČKO PREDOČIVANJE, geometrijski način prikazivanja odnosa među veličinama (radi veće zornosti i očiglednosti) pomoću crteža, a ponekad i modela u prostoru. Statistički podaci ili podaci dobiveni mjerenjem ili računom pregledno se prikazuju pomoću *tabela* ili *tablica,* koje mogu biti u *vertikalnom* ili *horizontalnom* obliku. Drugi je način prikazivanja pomoću *dijagrama.* To su crteži kojima se promatrane veličine, odnosno neki numerički podaci, najčešće statistički podaci, zorno prikazuju npr. tačkicama, linijama, pravokutnicima, kvadratima, krugovima, sektorima kruga i sl. Broj tačkica, duljine linija i veličine površina geometrijskih likova stoje u istom odnosu kao i brojčane veličine koje su njima prikazane.

Funkcionalni odnosi ili *funkcionalne zavisnosti* među promjenljivim veličinama, koje se zovu funkcijama, a iskazuju se sa $y = f(x)$, mogu se pregledno i jednostavno *grafički* predočiti u *koordinatnom sistemu:* nezavisno promjenljiva veličina shvati se kao *apscisa,* a pripadne veličine funkcije kao *ordinata.* Na taj način dobiva se niz tačaka, *krivulja,* kao geometrijski predstavnik funkcije. Sama slika zove se *grafikon* ili *graf funkcije* (v. Funkcija; Koordinatni sistem; Krivulja).

GRAFIČKO RAČUNANJE, način računanja u kojem se računske operacije zamjenjuju geometrijskim konstrukcijama.

GRAFIČKO RJEŠAVANJE SISTEMA JEDNADŽBI, v. Rješavanje jednadžbi.

GRAFIKON (GRAF) **FUNKCIJE,** v. Grafičko predočivanje.

GRANICA (LIMES), v. Granična vrijednost.

GRANICA POGREŠKE, v. Računanje s približnim vrijednostima.

GRANIČNA VRIJEDNOST (LIMES), vrijednost kojoj teži neki niz brojeva.

Beskonačno male veličine. Promjenljiva veličina x zove se beskonačno mala veličina ako u svojim promjenama postane i ostane po apsolutnoj vrijednosti manja od ma kako malenog unaprijed zadanog pozitivnog broja ε (epsilon): $|x| < \varepsilon$. Veličina x smanjuje se i neograničeno približava nuli. Kaže se x *teži* ili *konvergira nuli,* što se piše $x \to 0$.

Svojstva: algebarska suma dviju beskonačno malih veličina je beskonačno mala veličina; produkt dviju b. m. v. je b. m. v. Međutim kvocijent b. m. v. može, ali ne mora biti b. m. v.

Beskonačno velike veličine. Promjenljiva veličina x zove se b. v. v. ako u svojim promjenama postane i ostane veća od po volji velikog unaprijed zadanog broja N. To se piše $|x| \to \infty$; i čita »x teži u beskonačnost«.

Svojstva: suma dviju veličina, od kojih je jedna beskonačno velika a druga konačna, opet je b. v. v.; produkt dviju b. v. v. je b. v. v. Ako x postaje beskonačno velika veličina, onda $\frac{1}{x}$ postaje beskonačno mala veličina, i obrnuto: ako x postaje bes-

konačno mala veličina, onda $\frac{1}{x}$ postaje beskonačno velika veličina.

Granična vrijednost promjenljive veličine ili **granična vrijednost niza.** Prolazi li promjenljiva veličina x niz brojeva: $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, tada se kaže da x *teži* ili *konvergira* prema broju a, ili da x ima *graničnu vrijednost* ili *granicu* a, ako se brojevi niza mogu neograničeno približiti broju a. To se piše: $x \to a$ ili $\lim x = \lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Kaže se i ovako: broj a zove se graničnom vrijednošću promjenljive veličine x ako se razlika $|x - a|$ može učiniti beskonačno malom veličinom. Npr. opseg kruga je određen kao zajednička granica kojoj teže opsezi kružnici upisanih ili opisanih mnogokuta. Svaka promjenljiva veličina x koja teži granici a može se predočiti u obliku sume dva pribrojnika: prvi je pribrojnik konstantan broj, koji je upravo granična vrijednost a te veličine, a drugi je pribrojnik beskonačno mala veličina (h) : $x = a + h$.

Svojstva: granična vrijednost konstantne veličine jest sama ta veličina, $\lim a = a$; ako tri promjenljive veličine x, y i z pri uzastopnim promjenama stalno zadovoljavaju uvjet da je $x \leqq y \leqq z$, a pri tome x i z teže jednoj te istoj granici a, onda i y teži istoj granici a.

Teoremi o graničnim vrijednostima: limes sume jednak je sumi limesa: $\lim (x + y) = \lim x + \lim y$; limes razlike jednak je razlici limesa: $\lim (x - y) = \lim x - \lim y$; limes produkta jednak je produktu limesa: $\lim (x \cdot y) = \lim x \cdot \lim y$, napose:

$\lim x^n = (\lim x)^n$; limes kvocijenta jednak kvocijentu limesa: $\lim \frac{y}{x} = \frac{\lim y}{\lim x}$

Granična vrijednost funkcije. Ako funkcija $y = f(x)$, kada x poprima vrijednosti niza: $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, poprima niz vrijednosti: $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\ldots$, $f(x_n)$, $\ldots$, i ako niz argumenata teži nekoj granici a, pa tada i niz vrijednosti funkcije teži nekoj granici b, onda se to piše: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, ili $\lim\limits_{x \to a} y = b$. Kaže se i ovako: funkcija $f(x)$ teži granici b, kada x teži granici a, ako se razlika $|f(x) - b|$ *može* učiniti po volji malena, kada je razlika $|x - a|$ po volji malena. To se piše $f(x) \to b$, kad $x \to a$, ili kao gore. Važan je slučaj kod kvocijenta dviju funkcija, kada za istu vrijednost x i funkcija u brojniku i funkcija u nazivniku poprima vrijednost 0, pa je kvocijent neodređenog oblika $\frac{0}{0}$. Tom neodređenom obliku možemo, međutim, dati određenu vrijednost ako ga promatramo kao limes. Npr. $\frac{\sin x}{x}$ za $x = 0$ postane $\frac{0}{0}$. Međutim, dade se pokazati da je $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

H

HARMONIČKI ELEMENTI, četiri elementa (tačke, pravca ili ravnine) čiji *dvoomjer* iznosi — 1. Četiri *tačke A, B, C* i *D* jesu *harmoničke* ako je

dvoomjer $(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = -1$, tj. ako

tačke *C* i *D* dijele dužinu iznutra i izvana u istom omjeru. Četiri pravca *a, b, c* i *d,* koji prolaze jednom tačkom, tvore *harmonički pramen pravaca*

ako je dvoomjer $(abcd) = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)} = -1$

Četiri ravnine α, β, γ i δ, koje se sijeku u jednom pravcu, čine *harmonički pramen ravnina* ako je

$$(\alpha\,\beta\,\gamma\,\delta) = \frac{\sin(\alpha\,\gamma)}{\sin(\beta\,\gamma)} : \frac{\sin(\alpha\,\delta)}{\sin(\beta\,\delta)} = -1$$

Na osnovi nepromjenljivosti dvoomjera, a s obzirom na operaciju projiciranja, mogu se uvijek pomoću te operacije konstruirati nove harmoničke četvorke.

Harmoničke tačke i pravci mogu se i sasvim geometrijski definirati pomoću *potpunog četverovrha*

odnosno *potpunog četverostrana*. Ako tačkom A prolazi jedan par suprotnih stranica, tačkom B drugi par, a tačkama C i D stranice trećeg para potpunog četverostrana, onda su te tačke harmoničke. Pojam harmoničkih elemenata ima posebnu važnost u *projektivnoj geometriji*.

HARMONIČKI RAZMJER, jedan oblik razmjera. Čine ga tri broja a, b i c, kada je b harmonička sredina brojeva a i c, tj. kada je $a : c = (a - b) : (b - c)$. Sređeno, dobiva se: $b = \frac{2ac}{a + c}$

HARMONIČKI RED, divergentan red čiji su članovi recipročne vrijednosti prirodnih brojeva, tj. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$

HARPEDONAPTI, stručnjaci u starom Egiptu koji su na terenu na temelju nacrta *trasirali* temelje nove građevine. Pri trasiranju pravoga kuta služili su se užetom podijeljenim uzlovima na 12 jednakih dijelova. Tri veća uzla dijelila su uže na tri nejednaka dijela od po 3, 4 i 5 onih jednakih manjih dijelova. Te tri dužine karakteristične su za pravokutan trokut, naime: $5^2 = 3^2 + 4^2$, ili $25 = 9 + 16$ (v. Pitagorin poučak).

HEKSAEDAR, v. Poliedar.

HIPERBOLA, skup svih tačaka ravnine, tj. dvograna krivulja, za koje je razlika *radijus-vektora* od dvije čvrste tačke F_1 i F_2 (*žarišta* ili *fokusi*) uvijek stalna i jednaka duljini *glavne osi* $2a$, tj. $|r_1 - r_2| = 2a$ (a je *glavna poluos*). Ako su F_1 $(-e; 0)$

i $F_2(e; 0)$ fokusi, onda je $F_1F_2 = 2e$ (*e* je *linearni ekscentricitet*). Ako je *b sporedna poluos* ili *imaginarna poluos*, onda vrijedi relacija $e^2 = a^2 + b^2$. Polovište dužine F_1F_2 zove se središte hiperbole.

Osna jednadžba hiperbole glasi $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ili $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Ako se fokusima povuku pravci $x = e$ i $x = -e$, onda se duljina tetiva koje odsijeca hiperbola na ovim pravcima označuje sa $2p$ i naziva se *parametar* hiperbole. Dobije se da je *p* (*poluparametar*) $= \frac{b^2}{a}$. Omjer $\frac{e}{a} = \varepsilon$ zove se *numerički ekscentricitet* hiperbole. Ako je $a = b$, dobije se *jednakostranična hiperbola:* $x^2 - y^2 = a^2$.

Radijus-vektori: $r_1 = \frac{ex}{a} + a$, $r_2 = \frac{ex}{a} - a$.

Konstrukcija hiperbole, v. Geometrijske konstrukcije.

Uvjetna jednadžba kojoj moraju zadovoljavati a, b, m, n, da pravac $y = mx + n$ bude tangenta hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, glasi: $m^2a^2 - b^2 = n^2$.

Jednadžba tangente u tački $(x_1; y_1)$ hiperbole glasi: $y - y_1 = \frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$, ili sređeno: $b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2$

Jednadžba normale: $y - y_1 = -\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x - x_1)$

Polara. Pravac koji spaja dirališta obiju tangenata povučenih iz tačke $T(x_0; y_0)$ na hiperbolu zove

se *polara* tačke (x_0; y_0) s obzirom na hiperbolu. Tačka T zove se *pol* te polare. Jednadžba polare glasi: $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$.

Asimptote hiperbole jesu pravci kojima se grane hiperbole sve više približavaju, ali ih nikada ne dodiruju (ili kako se kaže: dodiruju u beskonačnosti). One su produžene dijagonale pravokutnika sa stranicama $2a$ i $2b$, dok je presjecište dijagonala ishodište koordinatnog sistema. Jednadžbe asimptota glase: $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$

Tjemena (ili vršna) jednadžba hiperbole: $y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2$ (radi usporedbe v. Parabola).

Konjugirane hiperbole zovu se dvije hiperbole koje imaju zajedničko središte, a glavna os jedne je sporedna os druge, i obrnuto. Ako je jednadžba jedne $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, onda će jednadžba konjugirane biti: $b^2x^2 - a^2y^2 = -a^2b^2$

HIPERBOLIČKA GEOMETRIJA, v. Neeuklidske geometrije.

HIPERBOLIČKA SPIRALA, v. Krivulja.

HIPERBOLIČKI PARABOLOID, v. Analitička geometrija.

HIPOCIKLOIDA, v. Krivulja.

HIPOTENUZA, v. Trokut.

HODOGRAF, v. Funkcija (vektorska).

HORIZONTALAN (VODORAVAN), v. Geometrijski elementi.

I

IKOZAEDAR, v. Poliedar.

IMAGINARNA JEDINICA, v. Imaginarni i kompleksni brojevi.

IMAGINARNI i KOMPLEKSNI BROJEVI, brojevi područja brojeva dobivenog operacijom korjenovanja negativnih brojeva.

Imaginarni brojevi. Jednadžba $x^2 = -1$ svodi se na $x = \pm\sqrt{-1}$. Ovaj drugi korijen iz -1 ne postoji u području realnih brojeva. Zato se područje brojeva proširuje, pa se za izraz $\sqrt{-1}$ uvodi naziv *imaginarna jedinica* i obilježava sa i, tj. definira se $i^2 = -1$. Kako jednadžba $x^2 = -a$ $(a > 0)$ vodi na $\sqrt{-a}$, a kako je $\sqrt{-a} = \sqrt{(-1) \cdot a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a} = i \cdot \sqrt{a} = i \cdot b$, to se drugi korijen iz negativnog broja zove *imaginarni broj.*

Kao što se realni brojevi predočuju tačkama na brojevnom pravcu, tako se i imaginarni brojevi mogu predočiti na imaginarnom brojevnom pravcu. Kako je broj bi nastao množenjem broja b sa i, a

kako od broja bi množenjem sa i izlazi $bi \cdot i = b \cdot i^2 = -b$, to znači da se uzastopnim dvokratnim množenjem broja b s imaginarnom jedinicom dolazi do broja $-b$, koji se na brojevnom pravcu iz tačke b dobije rotacijom za 180^0 oko ishodišta 0 kao središta. Jednokratnom množenju sa i odgovara prema tome rotacija za 90^0. Tako se dobije novi brojevni pravac koji je okomit na brojevnom pravcu realnih brojeva u ishodištu 0. Taj novi brojevni pravac zove se *imaginarni brojevni pravac* ili *imaginarna brojevna os*. Prema tome, množiti broj sa i znači rotirati odgovarajuću tačku apscisne osi oko 0 za pravi kut u pozitivnom smislu. Svakom imaginarnom broju odgovara posve određena tačka na imaginarnom brojevnom pravcu, i obrnuto, svakoj tački na imaginarnoj osi odgovara jednoznačno jedan imaginaran broj.

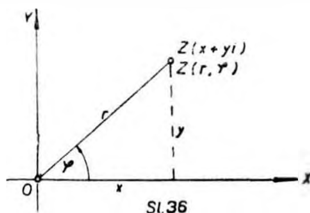
Kompleksni brojevi. Definicija: izraz oblika $a+bi$, gdje su a i b realni brojevi, a i imaginarna jedinica, zove se *kompleksni broj*, i to a je realni dio, a bi *imaginarni dio*, dok se samo b zove *koeficijent imaginarnog dijela*.

Dva kompleksna broja koja se razlikuju samo u predznaku imaginarnog dijela zovu se *konjugirano kompleksni brojevi*, npr. $x + iy$ i $x - iy$

Ako je posebno $y = 0$ u kompleksnom broju $z = x + iy$, tada je $z = x$ *realan broj*; ako je $x = 0$, onda je $z = iy$ koji se naziva i *čisto imaginaran broj*. Zato se kaže: realni brojevi su obuhvaćeni u području kompleksnih brojeva.

Jednakost $a + bi = c + di$ znači isto što i $a = c$, $b = d$. Posebno ako je $a + bi = 0$, onda to znači isto što i $a = 0$ i $b = 0$.

Geometrijsko predočivanje kompleksnih brojeva. Kompleksan broj $z = x + yi$ predočuje se u *brojevnoj* ili *Gaussovoj ravnini* tačkom Z koja ima apscisu jednaku realnom dijelu x, a ordinata je jednaka koeficijentu y imaginarnog dijela (sl. 36). Svakom kompleksnom broju odgovara tada određena tačka



Sl. 36

u ravnini, a i obrnuto, svakoj tački ravnine odgovara određeni kompleksni broj. Tačkama na apscisnoj osi odgovaraju realni brojevi, dok tačkama na ordinatnoj osi odgovaraju imaginarni brojevi. Može se dati i druga interpretacija. Spoji li se ishodište O s tačkom Z $(x; y)$, tada se usmjereni segment OZ zove radijus-vektor $(\vec{r})$ tačke Z. Tako je svakoj tački ravnine pridružen radijus-vektor, i obrnuto. *Modulom kompleksnog broja* $z = x + iy$ zove se realni broj $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, to je duljina radijus-vektora. Modul ili apsolutna vrijednost označuje se i ovako: $|x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}$. S ovim je u vezi i trigo-

nometrijski oblik kompleksnog broja. Kako radijus-vektor $\vec{r}$ zatvara s realnom osi kut φ, koji se zove *argument* kompleksnog broja $z = x + iy$, to će biti $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, pa je $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. To je *trigonometrijski oblik kompleksnog broja.* Dok je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, dotle se φ može naći iz $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, ili iz $\sin \varphi = \frac{y}{r}$, te $\cos \varphi = \frac{x}{r}$. Očito je da svaki kompleksan broj ima beskonačno mnogo vrijednosti argumenta, tj. $\varphi + 2k\pi$. Ako je φ uzeto između 0 i 2π, zove se *glavna vrijednost.*

Operacije s kompleksnim brojevima. Računska operacija s kompleksnim brojevima smatra se da je izvedena ako je rezultat predočen u obliku kompleksnog broja. Ako dolazi i^2, zamjenjuje se uvijek sa -1.

Zbrajanje: $(a+bi)+(c+di) = (a+c) + (b+d)i = A_1 + B_1 i$. Napomena: $(a + bi) + (a - bi) = 2a$.

Oduzimanje: $(a+bi) - (c+di) = (a - c)+(b-d)i = A_2 + B_2 i$. Napomena: $(a + bi) - (a - bi) = 2bi$

Množenje: $(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i = A_3 + B_3 i$. Napomene: $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$; polazeći od definicije $i^2 = -1$, lako se dobije: $i^3 = i^2 \cdot i = -i$; $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$; $i^5 = i^4 \cdot i = i$, itd. Općenito: $i^N = i^{4n+p} = i^p$; $i^{-4n-p} = i^{-p} = i^{4-p}$

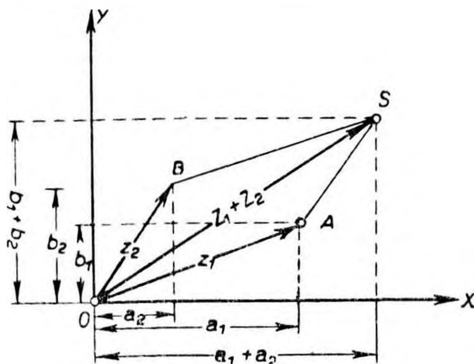
Dijeljenje: $(a + bi) : (c + di) = \dfrac{a + bi}{c + di} =$

$$= \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} =$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i = A_1 + B_1 i$$

Geometrijske operacije s kompleksnim brojevima svode se u stvari na operacije s *vektorima.*

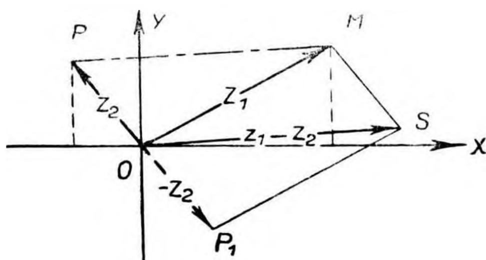
Zbrajanje: ako je $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = a_1 + b_1 i$, $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = a_2 + b_2 i$, onda je $z_1 + z_2 = (r_1 \cos \varphi_1 + r_2 \cos \varphi_2) + (r_1 \sin \varphi_1 + r_2 \sin \varphi_2) i = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$. Kako se a_1, b_1, a_2, b_2 mogu smatrati komponentama brojeva



Sl. 37

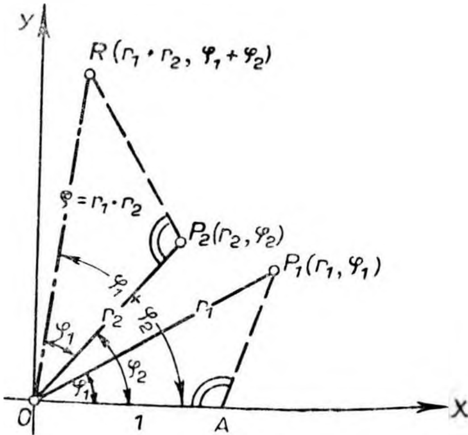
z_1 i z_2, to u stvari gornja relacija znači vektorsko zbrajanje. Na kraj jednog radijus-vektora nanese se početak radijus-vektora koji je paralelan drugom vektoru pribrojniku, pa je suma vektor koji spaja početak prvog vektora i kraj drugoga (to je *zbrajanje po pravilu trokuta).* Ako se načini paralelogram nad vektorima pribrojnicima, onda je dijagonala upravo suma (sl. 37). Ovo se može proširiti na više pribrojnika *(pravilo poligona).*

Oduzimanje se zasniva na zbrajanju suprotnog broja. Razlika se dobije kao spojnica krajeva minuenda i suptrahenda (sl. 38).

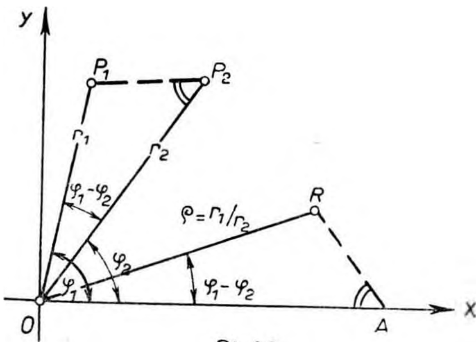


Sl. 38

Množenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku. Ako treba pomnožiti $z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$ sa $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, dobije se $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]$. Na tome se osniva geometrijska interpretacija množenja (sl. 39).


y
R ($r_1 \cdot r_2$, $\varphi_1+\varphi_2$)
$\rho = r_1 \cdot r_2$
$P_2(r_2, \varphi_2)$
$P_1(r_1, \varphi_1)$
φ_1
r_2
φ_2
r_1
φ_1
φ_2
φ_1
O
1
A
X

Sl. 39


y
P_1
P_2
r_1
r_2
$\varphi_1-\varphi_2$
R
$\rho = r_1/r_2$
φ_2
φ_1
$\varphi_1-\varphi_2$
O
A
X

Sl. 40

Dijeljenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2} \left[\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2) \right]$$ Na ovome se zasniva postupak kako se grafički dijele kompleksni brojevi (sl. 40).

Potenciranje kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku. Na osnovi pravila o množenju dobije se $Z = z^n = [r (\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n \varphi + i \sin n \varphi)$.

Radiciranje kompleksnog broja u trigonometrijskom obliku. Dobije se $Z = \sqrt{r (\cos \varphi + i \sin \varphi)} =$ $= \sqrt{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k \pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k \pi}{n} \right)$. Ako se broju k daju vrijednosti: 0, 1, 2, ..., n-1, dobije se n, različitih vrijednosti korijena, dok se za $k = n$, $n + 1$, $n + 2$, ... vrijednosti ponavljaju. Dakle: n-ti korijen iz kompleksnog broja ima n različitih vrijednosti.

Napomena: kompleksni su brojevi izvanredno važni u višoj matematici, osobito u *teoriji funkcija* i *višoj algebri.*

IMPLICITNI OBLIK, v. Funkcija; Pravac u analitici.

INDUKCIJA, način zaključivanja u matematici. Indukcija omogućuje da se iz vrijednosti određene postavke u slučajevima 1 i n zaključi na valjanost iste postavke i za slučaj $n + 1$, odakle se zaključuje

da ista postavka vrijedi za bilo koji slučaj. To je tzv. *totalna (potpuna) indukcija, matematička indukcija* ili *dokaz od n na n + 1.* Potpuna indukcija je vrlo važna u dokazivanju mnogih općenitih poučaka iskazanih u obliku određenih relacija.

INFINITEZIMALNI RAČUN, zajedničko ime za *diferencijalni i integralni račun.*

INFLEKSIJA, v. Tačka infleksije.

INTEGRAF, matematički instrument pomoću kojega se za neku zadanu krivulju može neposredno nacrtati odgovarajuća integralna krivulja.

INTEGRALNI RAČUN, dio infinitezimalnog računa, obuhvaća definiciju, svojstva, izračunavanje i primjenu integrala.

Pojam neodređenog integrala. *Primitivnom funkcijom* funkcije $f(x)$ ili izraza $f(x)\,dx$ zove se ona funkcija $F(x)$ kojoj je derivacija jednaka $f(x)$ ili diferencijal jednak $f(x)\,dx$ tj. $F'(x) = f(x)$. Kako je općenito $[F(x) + C]' = f(x)$, to znači da ima beskonačno mnogo primitivnih funkcija. One čine skup funkcija koje se razlikuju jedna od druge za neku aditivnu konstantu. Tako definirana primitivna funkcija zove se *neodređeni integral* i piše se: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, gdje je $f(x)\,dx$ *podintegralni izraz,* $f(x)$ *podintegralna funkcija* ili *integrand* a C se zove *konstanta integracije* ili *integraciona konstanta.* Traženje primitivne funkcije zove se *integriranje,* a grana matematike, koja se bavi integriranjem, zove se *integralni račun.* Kako integrirati znači naći onu funkciju koja derivirana daje pod-

integralnu funkciju, to je *integriranje inverzna operacija deriviranju.*

Aditivna konstanta. U grafičkoj se predodžbi za pojedine vrijednosti konstante C dobiju pojedine krivulje koje sve zajedno čine skup krivulja. Ponekad je potrebno naći jednu određenu primitivnu funkciju, tj. integralna konstanta poprima jednu određenu vrijednost koja se dobiva iz nekih postavljenih uvjeta. Npr. da krivulja prolazi određenom tačkom; dakle $F(x_0) + C = y_0$, odakle se nađe $C = y_0 - F(x_0)$.

Osnovna svojstva neodređenog integrala: a) Diferencijal neodređenog integrala jednak je podintegralnom izrazu, tj. $d \int f(x)\,dx = f(x)\,dx$, ili derivacija neodređenog integrala jednaka je podintegralnoj funkciji, tj. $(\int f(x)\,dx)' = f(x)$. Znak integrala $\int$ i znak diferencijala d, kada dolaze jedan za drugim, poništavaju se. b) $\int af(x)\,dx = a \int f(x)\,dx$, c) $\int [f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx$. Ukratko: integral sume jednak je sumi integrala.

Osnovne formule integracije dobiju se na temelju toga što su integriranje i deriviranje inverzne operacije. Npr. $\int x^n\,dx = x^{n+1} / (n + 1) + C$, $(n \neq -1)$; $\int e^x dx = e^x + C$; $\int \cos x\,dx = \sin x + C$; $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$, itd. Obično se najjednostavniji integrali skupe u *tablice osnovnih integrala,* koje se onda koriste u praksi.

Metode integracije. Ako zadani integral nije, kako se kaže, tablični, onda postoje neke općenitije metode integriranja. Tako postoji:

Metoda neposredne integracije, kada se zadani integral dade svesti na jedan ili više tabličnih integrala uz pomoć pravila i svojstava neodređenih integrala i pomoću identičnih transformacija podintegralne funkcije.

Metoda supstitucije, kada se mjesto nekog izraza u podintegralnoj funkciji uvede nova varijabla, ili kada se mjesto varijable integracije uvede neka funkcija nove varijable.

Metoda parcijalne integracije, koja se sastoji u ovome: kako je $(uv)' = u'v + v'u$, dobije se $uv = \int vdu + \int udv$ ili $\int udv = uv - \int vdu$. Tako se $\int udv$, koji se nije dao direktno izračunati, svodi na integral $\int vdu$ koji se dade izračunati.

Metoda neodređenih koeficijenata, sastoji se u tome da se zadana podintegralna funkcija, koja ima oblik racionalno razlomljene funkcije, rastavi na sumu više elementarnih funkcija uz pomoć neodređenih koeficijenata, koji se zatim daju izračunati.

Osim ovih općih postupaka postoje i neke klase funkcija koje se mogu integrirati na posve određeni način. Takve su: racionalne funkcije iracionalnih izraza; binomski integral $\int x^m (a + bx^n)^p dx$; racionalne funkcije trigonometrijskih izraza, i dr.

Određeni integral. Priraštaj $F(b) - F(a)$ primitivne funkcije $F(x) + C$ pri promjeni argumenta

od $x = a$ do $x = b$ zove se *određeni integral* i bilježi se $\int_a^b f(x)\, dx$, te je $\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$, to je *Newtonova formula*, gdje je *a donja granica, b gornja granica* određenog integrala. Da se izračuna određeni integral, treba najprije naći neodređeni, pa u dobiveni izraz uvrstiti mjesto x najprije gornju, a zatim donju granicu, pa od prvog rezultata oduzeti drugi. Zato se piše: $\int_a^b f(x)\, dx = \int f(x)\, dx \Big|_a^b = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Svojstva određenog integrala: $\int_a^b f(x)\, dx = - \int_b^a f(x)\, dx$; $\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$; ako se izvrši supstitucija u cilju transformiranja podintegralne funkcije, onda je potrebno izvršiti i transformaciju granica određenog integrala pomoću iste supstitucije.

Određeni integral definiran kao površina. Površina ispod krivulje je funkcija apscise, tj. $P = P(x)$, pa se pomoću upisanih i opisanih pravokutnika dobije: $f(x) \cdot \Delta x < \Delta P < f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$

Odavde slijedi $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta x} = \frac{dP}{dx} = f(x)$, pa je $dP = f(x)\, dx$ ili $\int dP = \int f(x)\, dx$, tj. $P = \int f(x)\, dx$. Ako se na apscisnoj osi uzmu dvije tačke $x = a$ i

$x = b$, onda se površina omeđena lukom krivulje, apscisnom osi i ordinatama u te dvije tačke izražava određenim integralom $P = \int_a^b f(x)\,dx$.

Određeni integral definiran kao limes sume. Interval integracije podijeli se na n dijelova duljine Δx, tada je $b - a = n \cdot \Delta x$, a djelišta su tada: $a, a + \Delta x, a + 2\Delta x, \ldots, a + n \cdot \Delta x = b$. U tim djelištima povuku se ordinate i načine upisani (ili opisani) pravokutnici, kojima su visine vrijednosti podintegralne funkcije u tim djelišnim tačkama, tj. $f(a), f(a + \Delta x), \ldots, f(b)$. Tada se načini suma P_1 površina upisanih pravokutnika, tj. $P_1 = f(a) \cdot \Delta x + f(a + \Delta x) \cdot \Delta x + \ldots + f[a + (n\text{-}1) \cdot \Delta x] \cdot \Delta x =$

$$= \sum_{x=a}^{b} f(x) \cdot \Delta x$$

Površina (P) omeđena krivuljom dobije se kao granična vrijednost od P_1 ako $\Delta x \to 0$, tj. $P = \lim P_1 =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{a}^{b} f(x) \cdot \Delta x$$ (analogno kod opisanih pravokutnika). Tako se definira:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{b} f(x)\,\Delta x$$

Odavde se razabire da se u određenom integralu radi o limesu sume od beskonačno mnogo beskonačno malih pribrojnika. Zato je i uzet znak $\int$ u obliku produženog slova S, početnog slova u riječi suma.

Primjene integralnog računa. Određeni integral ima veliko značenje kako u samoj matematici, tako i u njenim praktičnim primjenama. Npr. u *geometriji: izračunavanje luka (rektifikacija) krivulje* koja je grafička predodžba funkcije $y = \mathrm{f}(x)$: $s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$; *volumen rotacionog tijela,* koje nastaje rotacijom lika ispod krivulje $y = \mathrm{f}(x)$: $V = \pi \int_a^b y^2\, dx$; *površina rotacione plohe:* $P = 2\pi \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x$; *u fizici:* od primjena integralnog računa u fizici može se navesti *dužina puta.* Ako je brzina funkcija vremena t, tj. $v = \mathrm{f}(t)$, onda se put dobije po formuli: $s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t$; *rad sile* ($R$). Ako je sila neka funkcija $\mathrm{f}(x)$, gdje je x put, onda se dobije $R = \int_a^b \mathrm{f}(x)\,\mathrm{d}x$; *u tehnici:* npr. problem masa, moment inercije, električni potencijal, indukcioni otpor u krugu izmjenične struje, kapacitet u krugu izmjenične struje, količina tvari koja stupa u kemijsku reakciju, itd.

Napomena: postoje i *dvostruki* i *višestruki integrali* pomoću kojih se mogu izračunavati npr. oplošja i volumeni različitih tijela, te rješavati i mnogi problemi iz matematike, mehanike, fizike, tehnike i dr. To se proučava u općoj teoriji integralnog računa.

INTERPOLACIJA, postupak kad se između dva zadana broja uvrsti određeni broj članova po ne-

kom određenom zakonu, ili kad se iz niza pojedinačnih vrijednosti neke funkcije u intervalu $a < x < b$ može odrediti njezina vrijednost za svaku vrijednost argumenta x u tom intervalu. Specijalno: interpolacija kod aritmetičke i geometrijske progresije (v. Niz).

INTERVAL, skup svih realnih brojeva x sadržanih između brojeva a i b, a koji na brojevnom pravcu ispunjava dužinu od a do b. Brojevi a i b zovu se *granice intervala.* Interval je *zatvoren* ako su u njemu uključene i granice: $a \leqq x \leqq b$. To se još zove i *segment,* a bilježi se sa $[a, b]$. Interval je *otvoren* ako mu granice ne pripadaju: $a < x < b$, bilježi se sa (a, b).

INVERZNE FUNKCIJE, v. Funkcija.

INVERZNE OPERACIJE, općenito operacije kojima se ponovo postižu veličine ili izrazi izmijenjeni u toku nekih operacija. Tako je oduzimanje inverzna operacija zbrajanju, dijeljenje množenju, a korjenovanje i logaritmiranje potenciranju. U višoj matematici je npr. integriranje inverzna operacija deriviranju.

IRACIONALNA JEDNADŽBA, v. Jednadžba.

IRACIONALNI BROJEVI, beskonačni neperiodski decimalni brojevi. Pri izračunavanju n-tog (n cio pozitivan broj) korijena iz cijelog pozitivnog broja a treba razlikovati dva slučaja: radikand a je n-ta potencija nekog cijelog broja b, tj. $a = b^n$.

Tada je i $\sqrt[n]{a}$ jednak cijelom broju b. Radikand a nije n-ta potencija nekog cijelog broja b, pa je zato on sadržan između dvije susjedne n-te potencije, tj. $b^n < a < (b+1)^n$. Tada je $b < \sqrt[n]{a} < b+1$, pa $\sqrt[n]{a}$ ne može biti cio broj; on ne može biti jednak niti ikojem običnom razlomku, jer kad bi bio $\sqrt[n]{a} = \frac{p}{q}$ (p i q relativno prosti), moralo bi biti $a = \frac{p^n}{q^n}$. Ova jednakost, međutim, ne može postojati, jer su p^n i q^n relativno prosti, pa $\frac{p^n}{q^n}$ nije cio broj. $\sqrt[n]{a}$ ne može biti jednak ni beskonačnom periodskom decimalnom razlomku, jer kad bi to bilo, mogao bi se taj periodski decimalni razlomak pretvoriti u običan razlomak, ali $\sqrt[n]{a}$ prema prethodnom ne može biti jednak nijednom običnom razlomku. Takvi se brojevi zovu *iracionalni brojevi.* S njima se proširuje područje *racionalnih brojeva.* Racionalni i iracionalni brojevi zajedno čine područje *realnih brojeva.*

Napomena: ima i takvih iracionalnih brojeva koji nisu korijeni, npr. π, e. Računanje s iracionalnim brojevima u praksi svodi se na računanje s njihovim približnim vrijednostima. Rezultat će biti utoliko tačniji ukoliko se uzme više decimala racio-

nalnog broja u postupak. (Iracionalan broj aproksimira se racionalnim brojem.)

IZRAZ, općenito povezanost raznih ili istih matematičkih veličina operacijama. Svaka je formula jedan matematički izraz.

IZVOD, v. Diferencijalni račun.

J

JEDANPUTJEDAN, produkti brojeva od 1 do 10. Ti rezultati množenja, koji se moraju znati napamet da bi se mogla izvršiti operacija množenja, skupljeni su u *tablici množenja.*

JEDINICA, 1. nedjeljiv postojan element neke množine, nekog skupa. Ekvivalent nekog pojma, npr. jedinica u značenju ocjene »nedovoljan«; 2. *jedinica mjere:* neka određena dogovorom prihvaćena veličina koja služi za mjerenje (v. Sistemi mjera); 3. naziv ili za broj 1, ili za znamenku 1.

JEDNAČINA, v. Jednadžba.

JEDNADŽBA, osnovni algebarski pojam, naziv za određenu vrstu jednakosti.

Jednakost, identična jednakost. Jednakost je spoj znakom (=) dvaju jednakih brojeva ili dvaju brojevnih izraza jednakih vrijednosti. Općenito, ako imamo dva matematička izraza, onda se spoj tih izraza znakom (=) zove *jednakost.* Ako su takvi izrazi jednaki za svaku vrijednost općih brojeva, jednakost se naziva *identična jednakost* ili *identitet.*

Ako se mjesto jednog izraza napiše drugi njemu identičan, kaže se da je izvršena *identična transformacija*. Mogu se s jednakostima izvoditi i operacije na osnovi poučka: ako se na jednakim brojevima ili izrazima izvrše jednake promjene, bit će i rezultati jednaki. Ako je $a = b$, i istovremeno $c = d$, onda je $a + c = b + d$. Analogno slijedi za oduzimanje: $a - c = b - d$, za množenje: $ac = bd$, i za dijeljenje: $a : c = b : d$ (ovdje samo uz uvjet da je $c \neq 0$, $d \neq 0$).

Odredbena jednakost. Ako su dva matematička izraza jednaka samo za neke vrijednosti općih brojeva, a te vrijednosti treba istom *odrediti*, jednakost se zove *odredbena jednakost* ili, kraće, *jednadžba*. Umjesto da se kaže: odrediti ili naći vrijednost općih brojeva za koje je jednakost zadovoljena, kaže se kraće: *riješiti jednadžbu* (v. Rješavanje jednadžbi). Nađene vrijednosti za koje je jednadžba zadovoljena zovu se *rješenja* ili *korijeni jednadžbe*. Jednadžba koja uopće nema rješenja zove se *nemoguća*. Veličine u jednadžbama, koje treba odrediti i koje se obično obilježavaju sa x, y, itd., zovu se *nepoznanice*. Prema tome, jednadžba s jednom nepoznanicom ima opći oblik $A(x)=B(x)$. Ovdje treba odrediti one vrijednosti od x za koje će brojevna vrijednost od $A(x)$ biti jednaka brojevnoj vrijednosti od $B(x)$. $A(x)$ se zove *lijeva strana*, a $B(x)$ *desna strana* jednadžbe. Pojedini članovi na lijevoj i desnoj strani jednadžbe zovu se *članovi jednadžbe*.

Ekvivalentne jednadžbe. Ako je korijen jedne jednadžbe ujedno korijen i neke druge jednadžbe,

ali i obrnuto, onda se za takve dvije jednadžbe kaže da su *ekvivalentne.* Takve se jednadžbe koriste da se složenije zadane jednadžbe, a da se korijeni ne promijene, svode na jednostavnije ekvivalentne jednadžbe, tj. da se postepeno zamjenjuju drugim *transformiranim* (samo promijenjenim oblikom), dok se tim postupkom ne dođe do samih korijena jednadžbe. Prijelaz od jedne jednadžbe na ekvivalentnu izvrši se na osnovi nekih teorema.

Teoremi: ako se na svakoj strani jednadžbe izvrši identična transformacija, dobije se jednadžba koja je ekvivalentna sa zadanom, tj. ako se na obje strane jednadžbe $A(x) = B(x)$ pribroji neki broj, dobivena jednadžba $A(x) + C = B(x) + C$ je ekvivalentna; ako se pribroji i izraz $C(x) : A(x) + C(x) = B(x) + C(x)$. Po ovom pravilu izvodi se *transponiranje* (prenošenje) članova jednadžbe s jedne strane na drugu, samo se pri tome mijenja predznak prenesenih članova. Ako se u jednoj jednadžbi svi članovi transponiraju na jednu stranu, obično lijevu, kaže se da je jednadžba *svedena* ili *reducirana* na nulu. *Separacija nepoznanica* je postupak da se svi članovi koji sadrže nepoznanicu prenesu na jednu stranu jednadžbe (obično lijevu), a poznati članovi na drugu stranu (obično desnu). Pomnože li se obje strane jednadžbe $A(x) = B(x)$ jednim te istim brojem ($C \neq 0$), dobivena jednadžba $A(x) \cdot C = B(x) \cdot C$ ekvivalentna je sa zadanom. Isto je tako ako se množi izrazom $C(x)$.

Napomene: ako se jednadžba pomnoži nekim izrazom $M(x)$, nova jednadžba može dobiti i neki

korijen jednadžbe $M(x) = 0$. Ako se jednadžba podijeli nekim izrazom $N(x)$, kojim su obje strane jednadžbe djeljive, jednadžba gubi one korijene koji zadovoljavaju jednadžbu $N(x) = 0$. Svaka jednadžba oblika $\frac{A(x)}{B(x)} = 0$ ekvivalentna je jednadžbi $A(x) = 0$ uz uvjet da je $B(x) \neq 0$ za sve vrijednosti od x, koje zadovoljavaju jednadžbu $A(x) = 0$. U protivnom jednadžba nema rješenja.

Vrste. Jednadžbe sastavljene od algebarskih izraza zovu se *algebarske jednadžbe*, dok se ostale zovu *transcendentne*. Najjednostavnije transcendentne jednadžbe: *eksponencijalne*, *logaritamske* i *trigonometrijske*. Algebarske jednadžbe u kojima se nepoznanice javljaju pod znakom korijena zovu se *iracionalne*, dok se sve ostale mogu bez potenciranja svesti na oblik: $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ $(a_0 \neq 0)$. To je opća jednadžba n-tog stepena s jednom nepoznanicom. Za nju vrijedi osnovni stavak (teorem) algebre: *svaka algebarska jednadžba ima barem jedan korijen.* Odavde slijedi teorem da algebarska jednadžba ima toliko korijena koliki joj je stepen.

Primjene. Jednadžbe se primjenjuju pri rješavanju mnogih zadataka iz svakidašnje prakse u najrazličitijim područjima (kamatni račun, račun diobe, račun smjese, zadaci iz fizike, tehnike, i dr.) Takvi zadaci, koji su iskazani riječima pa se svode na odredbene jednadžbe, zovu se *problemi*. Kad jednadžbe izražavaju vezu između poznatih veličina i

dvije ili više nepoznanica, onda je potrebno toliko jednadžbi koliko je nepoznanica. Takav skup jednadžbi zove se sistem n jednadžbi od n nepoznanica (v. Sistem jednadžbi).

Napomena: nauka o jednadžbama zove se *algebra* u užem smislu. Ona predstavlja najvažniji i najmoćniji aparat cjelokupne matematike.

JEDNADŽBA ELIPSE, v. Elipsa.

JEDNADŽBA HIPERBOLE, v. Hiperbola.

JEDNADŽBA KRUŽNICE, v. Kružnica u analitici.

JEDNADŽBA PARABOLE, v. Parabola.

JEDNADŽBA PRAVCA, v. Pravac u analitici.

JEDNADŽBA RAVNINE, v. Analitička geometrija.

JEDNAKOST, v. Jednadžba.

JEDNAKOST LIKOVA, pojam koji izražava da ravni geometrijski likovi imaju *jednaku površinu.* Dva lika su jednaka kad se sastoje od jednakih dijelova. Svaki paralelogram jednak je pravokutniku koji ima s njim jednaku osnovicu i jednaku visinu. Ako dva paralelograma imaju jednake osnovice i jednake visine, oni su međusobno jednaki. Svaki je trokut jednak polovini paralelograma koji ima s njim jednaku osnovicu i jednaku visinu. Dva trokuta koji imaju jednake osnovice i jednake visine jednaki su. Ako se vrh trokuta giba po pravcu koji je usporedan s osnovicom, površine tako nastalih trokuta su jednake. Trokut i trapez jednaki

su ako je osnovica trokuta jednaka zbroju osnovica trapeza i ako imaju jednake visine.

JEDNOSTAVNE KAMATE, v. Kamatni račun.

JEDNOZNAČNO, pojam koji izražava poseban odnos matematičkih veličina. Kaže se da je preslikavanje ili pridruživanje jednog skupa na drugi jednoznačno ako svakom elementu jednog skupa odgovara samo jedan jedini element u drugom skupu. Ukoliko je ovo svojstvo obostrano, govori se o obostranoj jednoznačnosti, dnosno o obostrano jednoznačnom preslikavanju. Npr. jednoznačno pridruživanje brojeva i tačaka (v. Koordinatni sistem), ili jednoznačne funkcije (v. Funkcija).

K

KAMATNI RAČUN, račun koji se bavi s kamatima, a s njima u vezi i izračunavanjem glavnice, postotka i vremena.

Kamati su naknada koju zajmoprimac plaća zajmodavcu za korišćenje vrijednosti dobivenog zajma. Osoba ili ustanova koja daje novac uz kamate zove se *povjerilac* ili *vjerovnik*, onaj kome se daje noac na upotrebu ili koji se zadužuje zove se *dužnik*. Kamati se mogu odrediti bilo u obliku vraćanja veće vrijednosti od pozajmljene, bilo u obliku više cijene od sadašnje, bilo neposredno u obliku kamatne stope. Kamatna stopa obično se odnosi na razdoblje od godine dana. Kamati nekih zajmova imaju posebno ime, npr. kratkoročni i dugoročni kamati, ugovorni kamati, kamati štednih uloga, aktivni i pasivni kamati (koje dobiva odnosno plaća banka), penalni kamati, zelenaški kamati, itd.

Kamatni račun je *procentni račun*, samo dolazi u obzir i vrijeme koje se računa u godinama. Osnovna vrijednost sada se zove *glavnica* ili *kapital* (g), procentni iznos zove se *godišnji kamati* (k)

ili *interes*. Da se nađu kamati za ma koji broj godina, valja naći godišnje kamate i njih pomnožiti brojem godina. Ovaj račun se zove *jednostavni kamatni račun*. Osnovna formula kamatnog računa glasi: $k = \frac{g \cdot p \cdot v}{100}$. Ako su zadani mjeseci, onda je $v = \frac{\text{broj mjeseci}}{12}$, za dane je $v = \frac{\text{broj dana}}{360}$

Svaka od ove četiri veličine može se naći ako su poznate ostale tri. Iz osnovne formule, kao jednadžbe, dobije se za izračunavanje procenata: $p = \frac{100 \cdot k}{g \cdot v}$; za izračunavanje glavnice: $g = \frac{100 \cdot k}{p \cdot v}$; za izračunavanje vremena: $v = \frac{100 \cdot k}{g \cdot p}$

Složeni kamati. Posuđena ili uložena glavnica (kapital) nosi *kamate* koji su proporcionalni s *vremenom* i *glavnicom*, a određeni su *procentom*. Ako se kamati priklapaju glavnici tako da i kamati nose kamate, kaže se da je glavnica uložena na *složene kamate*. Kamati se *kapitaliziraju*. Glavnica G_0 (početna glavnica) naraste uz p% za godinu dana na $G_1 = G_0 + \text{kamati} = G_0 + \frac{G_0 p}{100} = G_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right) = G_0 \cdot q$, gdje je $q = 1 + \frac{p}{100}$ i zove se *kamatni faktor*, koji znači vrijednost na koju na-

raste 1 d zajedno s kamatima u toku jedne godine. Na kraju n-te godine vrijednost je glavnice $G_n = G_0 \cdot q^n$. To je formula za *konačnu vrijednost glavnice*. Pomoću ove formule može se naći ne samo konačna vrijednost glavnice G_n nego i početna (sadašnja) vrijednost $G_0 = \frac{G_n}{q^n}$, tj. koliko je trebalo uložiti prije n godina na složene kamate uz p% da se danas dobije svota G_n. Broj godina

$n = \frac{\log G_n - \log G_0}{\log q}$. Kamatni faktor $q = \sqrt[n]{\frac{G_n}{G_0}}$

Iz kamatnog faktora nađe se i procent p, i to iz jednadžbe $1 + \frac{p}{100} = q$.

Napomena: ako je $n = m + r$, gdje je m cio broj, a r pravi razlomak, onda se u praksi izračunavaju za m složeni kamati, a za r jednostavni kamati, te je tada

$$G_n = G_0 q^m + \frac{G_0 q^m r p}{100} = G_0 q^m \left(1 + \frac{rp}{100}\right)$$

Kamati se mogu priklapati glavnici i polugodišnje, tromjesečno, mjesečno, itd. Priklapaju li se kamati glavnici svakog m-tog dijela godine, onda je konačna vrijednost glavnice G_0 nakon n godina

$$G'_n = G_0 \left(1 + \frac{p}{100\, m}\right)^{mn}$$

Neprekidno ukamaćivanje. Ako se u ovoj formuli za ukamaćivanje svakog m-tog dijela godine stavi

$\frac{100\,m}{p} = x$ ili $m = \frac{px}{100}$, izlazi

$$G_n = G_0\left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{npx}{100}} \text{ ili } G_n = G_0\left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]^{\frac{pn}{100}}$$

Ako se sada pusti da m raste, tj. da se kamati priklapaju glavnici u sve manjim vremenskim intervalima, raste sve više i x, pa kada $m \to \infty$, onda i $x \to \infty$. Tada treba naći $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$. Ta granična vrijednost upravo definira transcendentni broj e, koji služi kao baza prirodnih logaritama. $e = 2{,}718\ 281\ 828\ 4\ldots$. Tada formula za konačnu vrijednost prelazi u $G_n = G_0 e^{\frac{np}{100}}$. To je formula za *neprekidno ukamaćivanje* ili *formula za prirodni rast* (npr. organskih bića, drveća, stanovništva, itd.).

KAPITAL (glavnica), v. Kamatni račun.

KARAKTERISTIČNE TAČKE TROKUTA, v. Trokut.

KARDIOIDA, v. Krivulja.

KATETA, v. Trokut.

KILO, prefiks koji se stavlja ispred osnovne jedinice da se naznači 1000 puta veća jedinica (v. Sistemi mjera).

KOCKA, pravilni heksaedar — jedan od pet pravilnih poliedara. Omeđena je sa šest sukladnih kva-

drata (v. Poliedar). Kod kocke kao pravilnog poliedra ima $p = 6$ (sukladnih kvadrata — 2 baze i 4 pobočke), $v = 8$ (sukladnih prostornih uglova, u kojima se sastaju po 3 brida), $b = 12$ (bridova). Sve četiri (prostorne) dijagonale kocke sijeku se u jednoj tački. Dijagonale kocke su jednake. Kvadrat dijagonale kocke jednak je sumi kvadrata triju bridova, tj. $d^2 = 3a^2$ ili $d = a \cdot \sqrt{3}$. Može se reći da je kocka kvadar koji ima sve tri dimenzije jednake. Oplošje i volumen kocke (v. Oplošje; Obujam).

KOEFICIJENT, svi faktori monoma koji su posebni brojevi. Ili općenitije: posebni ili opći brojevi uz potenciju varijable u matematičkim izrazima. Npr. u izrazu $3x^2 + 5(m + n)x + 4$ koeficijenti su 3 i $5(m + n)$. Koeficijent u raznim formulama, iako kao opći broj, ima vrlo često poseban naziv: npr. k. proporcionalnosti; k. otpora; k. smjera; k. trenja; k. elastičnosti; itd.

KOEFICIJENT SLIČNOSTI, v. Sličnost.

KOEFICIJENT SMJERA, v. Pravac u analitici.

KOLIČNIK, v. Dijeljenje.

KOLINEARNOST, pojam kojim se iskazuje da tačke leže na istom pravcu. Tačke su kolinearne ako leže na istom pravcu.

KOMBINATORIKA (NAUKA O KOMBINACIJAMA), u širem smislu ona grana matematike u kojoj se proučavaju zakoni i uvjeti o grupiranju, svrstavanju ili razmještaju predmeta, znakova, brojki i općenito pojmova, itd., kao i o broju pri tvorbi nastalih grupa. Prema tome, *kombinirati* (u širem smislu) znači zadane predmete, znakove, itd.

ređati po nekom pravilu jedne uz druge ili ih spajati u grupe. Ovi predmeti, znakovi i dr. zovu se *elementi,* a nastali sastavci i grupe, u koje ulaze ili svi elementi, ili neki od njih, zovu se *kompleksije.* Elementi se dijele na *niže* i *više.* Od dva elementa zove se viši (niži) onaj koji dolazi kasnije (ranije) u početnom rasporedu. Od dvije kompleksije viša je ona u kojoj se prije naiđe slijeva nadesno na viši element. Elementi u početnom rasporedu čine *najnižu kompleksiju.* Tri su bitno različita načina prema kojima se svrstavaju elementi u kompleksije, pa su i posebna imena tih kompleksija: *permutacije, kombinacije* (u užem smislu) i *varijacije.* Kod svake od tih triju vrsta uvijek je riječ ili o *tvorbi* kompleksija ili o *broju* svih kompleksija koje se mogu dobiti.

Permutacije. Permutacije su kompleksije u kojima se nalaze svi zadani elementi, a razlikuju se jedna od druge samo po različitom položaju elemenata, tj. po poretku. Dakle *permutirati* zadane elemente znači svrstati ili razmjestiti sve te elemente na sve moguće načine u obliku jednog niza. Broj svih permutacija od n različitih elemenata (permutacije bez ponavljanja) nađe se prema formuli $P(n) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n = n!$ (čitaj: n faktorijela).

Ako između n elemenata ima r među sobom jednakih i drugih s među sobom jednakih, onda se broj takvih permutacija (permutacije s ponavljanjem) izračunava prema formuli: $P_{r,s}(n) = \frac{n!}{r! \cdot s!}$

Tvorba: od elemenata *a, b, c, d* (među kojima nema jednakih) dobiju se po redu ove permutacije:

abcd	*bacd*	*cabd*	*dabc*	
abdc	*badc*	*cadb*	*dacb*	
acbd	*bcad*	*cbad*	*dbac*	Ovdje je $P(4) = 4! =$
acdb	*bcda*	*cbda*	*dbca*	$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$
adbc	*bdac*	*cdab*	*dcab*	
adcb	*bdca*	*cdba*	*dcba*	

Od četiri elementa *a, a, b, c,* (ima dva jednaka), dobiju se ove permutacije:

aabc	*baac*
aacb	*baca*
abac	*bcaa*
abca	*caab*
acab	*caba*
acba	*cbaa*

Ovdje je $P_2(4) = \frac{4!}{2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 12$

Kombinacije. Kombinacije su kompleksije u koje ne ulaze svi zadani elementi, nego samo izvjestan njihov broj. Stoga *kombinirati* (u užem smislu) znači tvoriti takve kompleksije koje se razlikuju između sebe samo različitim izborom elemenata. Ako npr. u kompleksije od n elemenata ulazi po r elemenata, govori se o *kombinacijama r-tog razreda od n elemenata.* Kako se kod kombinacija ne gleda na poredak elemenata, to se elementi pišu u prvobitnom poretku, tj. ne dolazi viši element ispred nižeg. Kombinacije prvog, drugog, trećeg, četvrtog, petog razreda zovu se također *unione, ambe, terne, kvaterne, kvinterne.* Broj kombinacija od n elemenata r-tog razreda bilježi se sa $K_r(n)$ i dobije se da je

$$K_r(n) = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\ldots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r}$$

Simbol $\binom{n}{r}$ čita se: *n* povrh *r*. Zove se binomni koeficijent (v. Binomni poučak).

Svojstva:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}; \quad \binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \text{ posebno}$$

$$\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1, \text{ dok je } \binom{n}{n+1} = 0, \binom{n}{n+2} =$$

$$= 0, \text{ itd.}; \quad \binom{n}{r} + \binom{n}{r-1} = \binom{n+1}{r} \text{ ili } \binom{n}{r} +$$

$$+ \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1}; \quad \binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} +$$

$$+ \ldots + \binom{n+s}{n} = \binom{n+s+1}{n+1}$$

Ako se sa $K'_r(n)$ označi broj kombinacija *r*-tog razreda od *n* elemenata s ponavljanjem (svaki element dolazi u kompleksiji najviše toliko puta koliki je razred), onda je:

$$K'_r(n) = K_r(n+r-1) = \binom{n+r-1}{r} =$$

$$= \frac{n\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+r-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot r}$$

Tvorba: kombinacije bez ponavljanja od elemenata *a*, *b*, *c*, *d* trećeg razreda:

abc *bcd*
abd Ovdje je $K_3(4) = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 4$
acd

Kombinacije s ponavljanjem od elemenata *a, b, c, d* trećeg razreda:

aaa	*abc*	*bbb*	*ccc*
aab	*abd*	*bbc*	*ccd*
aac	*acc*	*bbd*	*cdd*
aad	*acd*	*bcc*	*ddd*
abb	*add*	*bcd*	
		bdd	

Ovdje je $K'_3(4) = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$

Varijacije. Varijacije su kompleksije u koje ne ulaze svi zadani elementi, nego samo izvjestan njihov broj, ali se vodi računa i o *izboru elemenata* u kompleksiji, kao i o *njihovom međusobnom razmještaju.* Stoga *varirati* znači sastavljati od zadanih elemenata različite kompleksije, a da u svakoj kompleksiji bude isti broj elemenata uz njihovo ispremještavanje na sve moguće načine, tj. varijacije se dobiju permutiranjem kombinacija. Ako od n elemenata ulazi npr. po r elemenata, govori se o *varijacijama r-tog razreda.*

Napomena: permutacije su specijalan slučaj varijacija, naime, ako je razred jednak broju svih elemenata ($r = n$), onda su takve varijacije zapravo permutacije.

Broj varijacija bez ponavljanja r-tog razreda obilježava se sa $V_r(n)$, i formula za izračunavanje tog broja glasi:

$$V_r(n) = K_r(n) \cdot P(r) = \binom{n}{r} \cdot r! = n\,(n\text{-}1)\,(n\text{-}2)\ldots(n\text{-}r+1)$$

Ako se sa $V'_r(n)$ označi broj varijacija od n elemenata r-tog razreda s ponavljanjem, onda je: $V'_r(n) = n^r$

Tvorba: varijacije bez ponavljanja od elemenata *a, b, c, d* trećeg razreda:

abc	*bac*	*cab*	*dab*
abd	*bad*	*cad*	*dac*
acb	*bca*	*cba*	*dba*
acd	*bcd*	*cbd*	*dbc*
adb	*bda*	*cda*	*dca*
adc	*bdc*	*cdb*	*dcb*

Ovdje je $V_3(4) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$

Varijacije s ponavljanjem od elemenata *a, b, c, d* trećeg razreda:

aaa	*baa*	*caa*	*daa*
aab	*bab*	*cab*	*dab*
aac	*bac*	*cac*	*dac*
aad	*bad*	*cad*	*dad*
aba	*bba*	*cba*	*dba*
abb	*bbb*	*cbb*	*dbb*
abc	*bbc*	*cbc*	*dbc*
abd	*bbd*	*cbd*	*dbd*
aca	*bca*	*cca*	*dca*
acb	*bcb*	*ccb*	*dcb*
acc	*bcc*	*ccc*	*dcc*
acd	*bcd*	*ccd*	*dcd*
ada	*bda*	*cda*	*dda*
adb	*bdb*	*cdb*	*ddb*
adc	*bdc*	*cdc*	*ddc*
add	*bdd*	*cdd*	*ddd*

Ovdje je $V_3^1(4) = 4^3 = 64$

KOMPLANACIJA, postupak kojim se izračunava površina dijelova zakrivljenih ploha, a rješava se obično integralnim računom.

KOMPLANARNOST, pojam kojim se iskazuje da tačke ili pravci leže u istoj ravnini. Tačke (pravci, dužine, . . .) jesu komplanarne ako leže u istoj ravnini.

KOMPLEKSNI BROJEVI, v. Imaginarni i kompleksni brojevi.

KOMPLEMENTNI KUTOVI, v. Kut.

KOMPONENTA, sastavni dio neke cjeline. Npr. da je vektor $\vec{A}$ rastavljen u komponente piše se: $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$, gdje su A_x, A_y, A_z komponente dobivene kao projekcije vektora $\vec{A}$ na koordinatne osi, a $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ jesu jedinični vektori (v. Vektori).

KONCENTRIČAN, zajedničkog središta, v. Kružnica; Kugla.

KONGRUENCIJA, u geometriji *sukladnost* ili *podudarnost*. Dva su lika kongruentna ako imaju isti oblik i veličinu. Ako su dva lika kongruentna s trećim, onda su kongruentna i među sobom.

KONHOIDA, v. Krivulja.

KONIKE, v. Presjeci stošca.

KONKAVNO i KONVEKSNO (lat. concavus udubljen, convexus ispupčen), pojmovi kojima se iska-

zuje određeno svojstvo nekih geometrijskih oblika ili nekih skupova.

Ako poligon određuje takav skup tačaka u ravnini da svaka dužina koja spaja par tačaka tog skupa *pripada* (odnosno *ne pripada*) tom skupu, takav se poligon zove *konveksan* (odnosno *konkavan*).

Šiljasti, pravi, tupi i ispruženi kutovi zovu se *konveksni kutovi*. Kutovi koji su veći od ispruženog, a manji od punog kuta zovu se *konkavni*.

Ako je krivulja definirana jednadžbom $y = f(x)$, kaže se da je ona u jednom intervalu (a, b) *konkavna* ili *konveksna*, prema tome da li njezin luk u tom intervalu leži *iznad* tangente povučene na krivulju u bilo kojoj tački promatranog luka, ili *ispod* nje. Krivulja je konkavna ako je svaka ordinata tangente stalno manja ili najviše jednaka ordinati krivulje. Nađe se da mora biti $y''(x) \geqq 0$. Obratno, ako je krivulja konveksna, onda je svaka ordinata tangente stalno veća ili najmanje jednaka ordinati krivulje. Tada mora biti $y''(x) \leqq 0$.

KONSTANTA, veličina koja ima uvijek istu vrijednost; u slučaju da se odnosi na neku promjenu, zove se konstanta te promjene.

KONSTRUKCIJA (klasična), crtanje geometrijskih likova pomoću ravnala i šestara tako da zadovoljava određenim pravilima i uvjetima izvođenja (v. Geometrijske konstrukcije).

KONUS, v. Stožac.

KONUSNA (STOŽASTA) **PLOHA,** v. Plohe.

KONVERGENCIJA, v. Granična vrijednost; Niz; Redovi.

KOORDINATNI SISTEM, sredstvo ili način pomoću koga se tačkama pridružuju brojevi, a brojevima tačke.

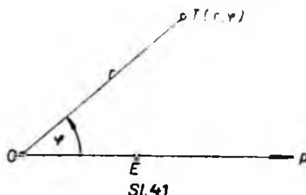
Brojevni pravac ili **koordinatni pravac** služi za predočivanje brojeva i grafičko računanje s njima. To je svaki pravac (p) na kojem su određene dvije tačke: *početna tačka* ili *ishodište* (0), koja predočuje nulu, i *jedinična tačka* (E) tako da je $\overline{0E} = 1$ (*jedinična dužina*). Dio pravca od ishodišta u smjeru prema jediničnoj tački zove se *pozitivna poluos*, a suprotno od 0 *negativna poluos*. Svakom broju x pripada na brojevnom pravcu p posve određena tačka. Obrnuto, po volji uzetoj tački T pripada posve određeni broj, koji se zove *apscisa* tačke T. Apscisa neke tačke T brojevnog pravca jeste broj, a apsolutna vrijednost tog broja kazuje koliko se puta jedinica dužine nalazi u dužini OT. Dakle, apscisa tačke nije dužina nego neimenovan broj. Tako se pomoću brojevnog pravca uspostavlja veza između brojeva, kao aritmetičkog pojma, i tačaka pravca p, kao geometrijskog pojma.

Koordinatni sistem u ravnini: dva međusobno okomita brojevna pravca sa zajedničkim ishodištem. Horizontalan brojevni pravac zove se *apscisna os* ili *os x*, a na nj okomiti *ordinatna os* ili *os y*. Projicira li se neka tačka ravnine na os x dobije se projekcija T_x, pa se mjerni broj od OT_x zove *apscisa* tačke T. Isto je tako i na osi y mjerni broj od OT_y

ordinata tačke T. Apscisa i ordinata tačke jednim se imenom zovu *koordinate* tačke T. Da tačka T ima koordinate x i y bilježi se $T(x; y)$. Svakoj tački koordinatne ravnine pripada određena apscisa x i ordinata y. Vrijedi i obratno. Koordinatne osi dijele ravninu na četiri *kvadranta*. Dvije tačke koordinatne ravnine, koje su simetrične prema ordinatnoj osi, imaju jednake ordinate, dok su im apscise suprotni brojevi. Ako su simetrične prema apscisnoj osi, onda imaju jednake apscise, a ordinate su im dva suprotna broja. Tačke koje su simetrične prema ishodištu imaju i suprotne apscise i suprotne ordinate. Krivulja u ravnini, kao skup određenih tačaka u koordinatnom sistemu, može se odrediti jednadžbom $y = f(x)$, koja izražava vezu između apscisa i ordinata svih tačaka te krivulje (v. Analitička geometrija; Krivulja).

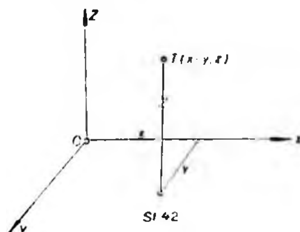
U nekim istraživanjima zgodnije je primijeniti tzv. *kosokutni koordinatni sistem*, kod kojega je kut između osi različit od pravoga kuta. Pravokutni koordinatni sistem još se zove i Descartesov koordinatni sistem (v. Descartes).

Često se primjenjuje i tzv. *polarni koordinatni sistem* u ravnini, u kojem se položaj neke tačke T određuje također sa dva broja, prvi je mjerni broj r dužine, koja spaja tačku T s ishodištem, a drugi mjerni broj kuta φ, što ga dužina r zatvara s polarnom osi p tog sistema (sl. 41). Tačka je, dakle, određena *radijus-vektorom* r i *argumentom* φ, pa se piše $T(r; \varphi)$.



Sl.41

Koordinatni sistem u prostoru. Položaj tačaka u prostoru također se određuje pomoću koordinata, no u tom slučaju koordinatni sistem ima tri osi: os apscisa x, os ordinata y i os aplikata z, pa je tačka određena sa tri broja (koordinate), tj. $T(x; y; z)$ (sl. 42). Po dvije koordinatne osi određuju ravnine.



Sl 42

Ove tri ravnine zovu se *koordinatne ravnine:* ravnina (xy), ravnina (xz) i ravnina (yz). Te tri ravnine dijele prostor u osam *oktanata.*

Osim pravokutnog koordinatnog sistema u prostoru i kosokutnog koordinatnog sistema postoji još: *polarni* ili *sferni koordinatni sistem,* kada je tačka određena radijus-vektorom i sa dva kuta φ i ψ (prvi je kut što ga projekcija radijus-vektora u

(xy) čini sa osi x, a drugi je kut što ga čini radijus--vektor sa osi z); i *cilindrični koordinatni sistem*, kada je tačka određena polarnim koordinatama r i φ, a i aplikatom z, tj. $T(r, \varphi, z)$.

Prijelaz iz jednog koordinatnog sistema u drugi, v. Transformacija koordinata.

KOREKTURA, v. Računanje s približnim vrijednostima.

KORELACIJA, poseban oblik zavisnosti, ali ne strogo funkcionalne, nego statističke (v. Statistika).

KORIJEN, v. Korjenovanje.

KORJENOVANJE (RADICIRANJE), operacija inverzna potenciranju. Pomoću nje se rješava zadatak da se iz poznate vrijednosti potencije x^n i njezina poznata eksponenta n izračuna baza x. Ako je npr. $x^n = a$, onda se operacija korjenovanja naznačuje simbolički $\sqrt[n]{a} = x$, i čita: n-ti korijen iz a jednak je x. Posebno se iz $x^2 = a$ ili $x^3 = a$ dobije $x = \sqrt{a}$ ili $x = \sqrt[3]{a}$. Broj a je *radikand* ili *potkorijena veličina; n* je *eksponent korijenov;* $\sqrt[n]{a}$ je n-ti *korijen* (radix). Prema tome je korijen rezultat operacije korjenovanja.

Definicije: $\sqrt[n]{a^n} = a$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

Teoremi: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} =$

$= \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$; $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[n:r]{a^{m:r}}$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}, \text{ ili } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Potencije s razlomljenim eksponentom: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Odavde se vidi da je radiciranje samo poseban slučaj potenciranja.

Napomena: prethodni teoremi vrijede beziznimno ako su a i b pozitivni.

Korijen iz »algebarskog broja«. Ako je $a > 0$, onda je $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$, $\sqrt[2n+1]{-a^{2n+1}} = -a$, $\sqrt[2n]{a^{2n}} = a$; $\sqrt[2n]{-a^{2n}}$ nije realno. Dakle, parni korijen iz negativnog broja vodi na imaginarne i kompleksne brojeve.

Napomena: ako se a ne može predočiti u obliku potencije s korijenovim eksponentom, onda $\sqrt[n]{a}$ vodi na iraconalne brojeve (v. Područja brojeva).

Racionaliziranje nazivnika, tj. uklanjanje korijena iz nazivnika:

$$\frac{A}{R\sqrt[m]{a^n}} = \frac{A\sqrt[m]{a^{m-n}}}{R \cdot a}$$, gdje je $m > n$; ako je $m < n$, onda se najprije radikand djelomično radicira;

$$\frac{A}{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}} = \frac{A(\sqrt{a} \mp \sqrt{b})}{a - b}$$

Opći poučak o korjenovanju. Ako pri izračunavanju n-tog korijena ostane ostatak r, onda je radi-

kand jednak zbroju ostatka i n-te potencije nađenog korijena.

Drugi korijen ili *izračunavanje drugog korijena* (antikvadrata). Postupak se razabire iz primjera:

$\sqrt{7\,23{,}61} = 26{,}9$
3 2|3 : 46 · 6
47 6|1 : 529 · 9
= 00

Radikand se, počevši od decimalnog zareza, rastavi lijevo i desno u dvoznamenkaste grupe, dokle se dade. Ako je radikand cio broj, onda rastavljanje počinje od kraja pa nalijevo.

Za kvadrate, kubove, kvadratne korijene i kubne korijene, naročito u praksi zbog toga što su te operacije dosta složene i duge, postoje *tablice* u kojima se nalaze rezultati i upute kako se koriste.

KOS POLOŽAJ, v. Geometrijski elementi.

KOSEKANS, v. Trigonometrija.

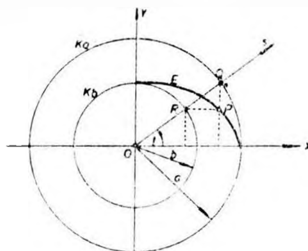
KOSINUS, v. Trigonometrija.

KOSINUSOV POUČAK (CARNOTOV), v. Trigonometrija.

KOTANGENS, v. Trigonometrija.

KRIVULJA (u ravnini), jednodimenzionalna tvorevina tačaka ili geometrijsko mjesto tačaka određenih svojstava.. Kao prijelaz od pravca na krivulju može se smatrati izlomljena crta sastavljena od dužina. Ako te dužine postaju sve manje, a njihov broj sve veći, tada na granici, kad njihove duljine teže prema nuli, izlomljena crta prelazi u krivulju, a pravci određeni tim dužinama prelaze u

njezine tangente (v. Diferencijalni račun). Krivulja predočena u koordinatnom sistemu ima jednadžbu oblika $y = f(x)$, koja predstavlja vezu između apscise i ordinate svake njezine tačke. Jednadžba krivulje može biti dana i u parametarskom obliku: $x = x(t)$, $y = y(t)$. Npr. parametarske jednadžbe elipse dobiju se ovako: neka su K_a i K_b dvije koncentrične kružnice (sl. 43) s polumjerima a i b,



Sl. 43

kojih se središta nalaze u ishodištu. Povuče se iz O zraka s, koja prema osi x zatvara kut t, i koja siječe K_a u tački Q, K_b u tački R. Zatim se povuče tačkom Q paralela prema y-osi, a tačkom R paralela prema x-osi. Ove se paralele sijeku u tački $P(x; y)$. Tačka Q ima koordinate $x_1 = a \cos t$, $y_1 = a \sin t$, dok tačka R ima koordinate $x_2 = b \cos t$, $y_2 = b \sin t$. Budući da P ima istu apscisu kao Q i istu ordinatu kao R, to se dobije $x = a \cos t$, $y = b \sin t$ kao *parametarske jednadžbe elipse.* Eliminira li se iz ove dvije jednadžbe parametar t, dobije se osna jednadžba elipse (v. Elipsa). Prema

tome da li je jednadžba krivulje algebarska ili transcendentna, krivulja se zove *algebarska* ili *transcendentna.* Algebarske krivulje dijele se po *redu* i po *razredu.* Red algebarske krivulje podudara se sa stepenom njezine jednadžbe i maksimalnim brojem tačaka u kojima je može sjeći pravac. Razred se podudara s maksimalnim brojem tangenata koje se na nju mogu povući iz jedne tačke izvan krivulje. Krivulje koje su reda većeg od dva mogu osim običnih tačaka imati i tzv. *singularne tačke,* i to: tačku *infleksije,* u kojoj tangenta ne samo dira nego i siječe krivulju; zatim *dvostruke* odnosno *višestruke* tačke, kojima krivulja prolazi dva ili više puta, i dr. U dvostrukoj tački krivulja ima dvije različite tangente, u trostrukoj tri, itd. Ako se svakoj tački krivulje može pridružiti druga njezina tačka simetrična s obzirom na jednu te istu čvrstu tačku, onda se taj centar simetrije zove i *centar* krivulje.

Ako tačke krivulje ne leže u istoj ravnini, krivulja je *prostorna* (v. Analitička geometrija).

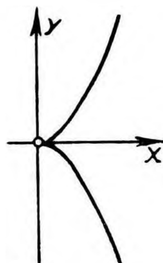
Krivulje drugog stepena (ujedno i drugog razreda i drugog reda): kružnica, elipsa, hiperbola i parabola zovu se *konike* (v. Presjeci stošca).

Neke važnije krivulje koje se susreću u praksi:

Krivulje trećeg reda:

Polukubna parabola (sl. 44). Jednadžba: $y = x^{\frac{3}{2}}$ ili $y^2 = x^3$; u parametarskom obliku: $x = t^2$, $y = t^3$. U ishodištu ima dvostruku tačku, šiljak. Zove se i

A.1. Polukubna parabola (Neilova)

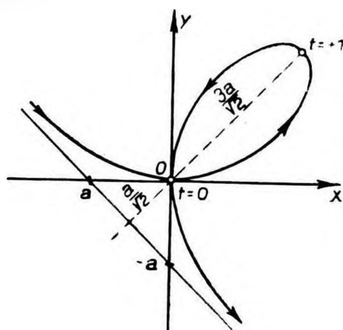


Sl. 44

Neilova parabola, po engl. matem. *W. Neilu* (1637—1670), koji je 1659. izvršio *rektifikaciju* te krivulje. Putanja tijela koje pada iz velike visine, zbog rotacije Zemlje, nije pravac, nego Neilova parabola.

Descartesov (Dekartov) *list (folium Cartesii)* (sl.

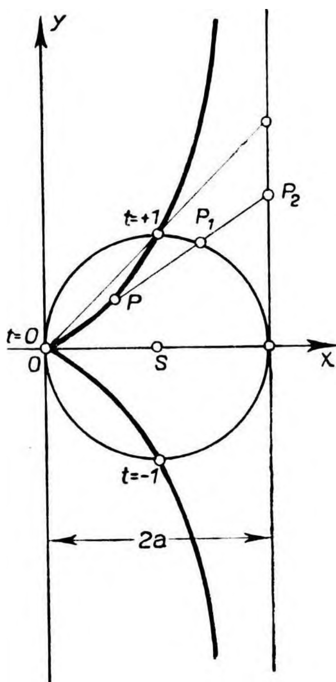
A.2. Descartesov list



Sl. 45

45). Jednadžba: $x^3 + y^3 = 3axy$; u parametarskom obliku: $x = \frac{3at}{1+t^3}$, $y = \frac{3at^2}{1+t^3}$. Ova krivulja ima

A.3. Cisoida



Sl. 46

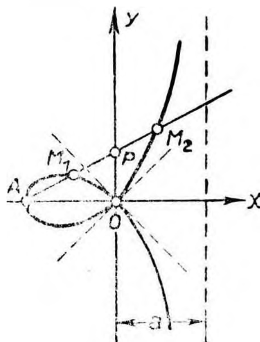
asimptotu, koja je određena jednadžbom: $x + y + a = 0$. Ima petlju. U ishodištu ima dvije tangente, to su same koordinatne osi.

Cisoida (sl. 46). Njene se tačke konstruiraju na zrakama pramena iz ishodišta uz uvjet da je $P_1P_2 = OP$. Njena je jednadžba: $x\,(x^2 + y^2) = 2ay^2$; u parametarskom obliku:

$$x = \frac{2at^2}{1 + t^2}, \quad y = \frac{2at^3}{1 + t^2};$$

u polarnim koordinatama: $r = \dfrac{2\,a \cdot \sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$, ($a$ je polumjer kružnice). Krivulju je proučavao grč. matem. *Dioklo* (Diokles, II st. pr. n. e.), prilikom rješavanja *delskog problema.*

Strofoida (sl. 47). Geometrijsko mjesto tačaka za

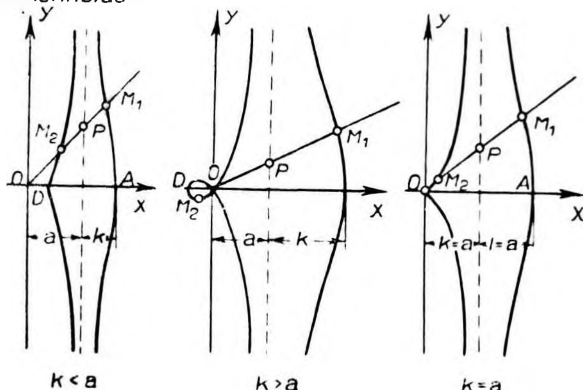


Sl. 47

koje je $PM_1 = PM_2 = OP$ (P je po volji uzeta tačka na osi y; vrh pramena je A ($-a$; 0). Jednadžba: $y^2 = x^2 \cdot \frac{a+x}{a-x}$; parametarski: $x = a\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $y = at\frac{t^2-1}{t^2+1}$; u polarnim koordinatama: $r = -a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}$. Ima petlju s dvostrukom tačkom u ishodištu.

Krivulje četvrtog reda:

Konhoida (sl. 48). Geometrijsko mjesto tačaka



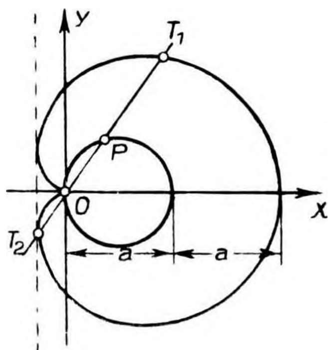
Sl. 48

M za koje je $OM = OP \pm k$ [za znak (+) *vanjska grana*, a za (—) *unutarnja*]. Jednadžba:

$(x-a)^2(x^2+y^2)-k^2x^2=0$; u parametarskom obliku: $x=a+k\cos\varphi$, $y=a\operatorname{tg}\varphi+k\sin\varphi$; u polarnim koordinatama: $r=\frac{a}{\cos\varphi}\pm k$. Konhoidu je pronašao *Nikomed* (II st. pr. n. e.) u vezi s rješavanjem *delskog problema* i problema *trisekcije kuta.*

Kardioida (srcolika) (sl. 49). Geometrijsko mjesto tačaka, koje nastaje ako se na svakoj sekanti

5.2. *Kardioida*

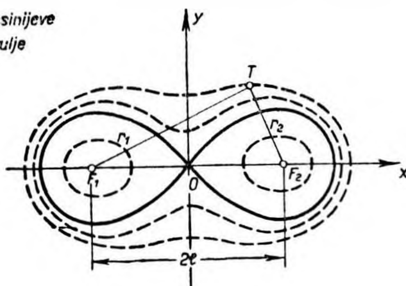


Sl. 49

zadane kružnice, koja prolazi njezinom čvrstom tačkom O, odrede po dvije tačke udaljene za veličinu dijametra a od drugog sjecišta P na sekanti. Treba da je $PT_1=PT_2=a$. U tački O krivulja ima

šiljak. Kardioida je ujedno i epicikloida (v. tač. C. 2.), jer nju opisuje tačka kružnice, koja se kotrlja po jednakoj kružnici: Jednadžba:
$(x^2 + y^2)^2 - 2\,ax\,(x^2 + y^2) = a^2y^2$; u param. obliku: $x = a \cos t\,(1 + \cos t)$, $y = a \sin t\,(1 + \cos t)$; u polarnim koordinatama: $r = a \cdot (1 + \cos \varphi)$.

Cassinijeve (Kasinijeve) *krivulje (ovali)* (sl. 50),



Sl. 50

nazvani po tal. matem. i astron. *G. D. Cassiniju.* Definirane su kao geometrijsko mjesto tačaka u ravnini, kojima je produkt udaljenosti od dvije čvrste tačke (fokusi) stalan. Te su krivulje određene jednadžbom: $r_1 \cdot r_2 = a^2$, gdje su r_1 *i* r_2 udaljenosti tačke na krivulji od fokusa F_1 i F_2, i gdje je $F_1F_2 = 2e$.

Ako je: 1) $a < e$, krivulja se raspada na dva ovala oko fokusa; 2) $a = e$, krivulja ima oblik osmice, zove se *lemniskata;* 3) $a > e$, krivulja se sastoji od jednog ovala oko oba fokusa.

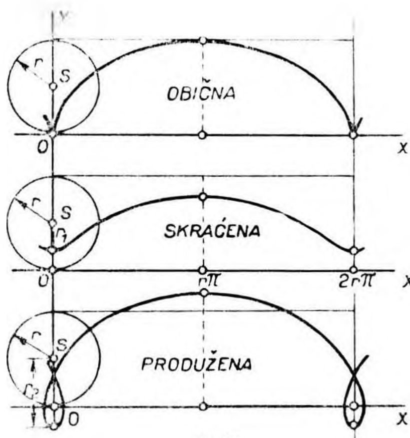
Jednadžba: $(x^2 + y^2)^2 - 2e^2\,(x^2 - y^2) = a^4 - e^4$; u polarnim koordinatama:

$r^2 = e^2 \cos 2\varphi \pm \sqrt{e^4 \cos^2 2\varphi + (a^4 - e^4)}$. Ako je $a = e$, dobija se jednadžba *lemniskate:* $(x^2 + y^2)^2 - 2a^2 (x^2 - y^2) = 0$; u polarnim koordinatama $r = a\sqrt{2 \cos 2\varphi}$ (ishodište je dvostruka tačka — uzao).

Vrste cikloida.

Cikloida, krivulja koju opisuje jedna tačka na polumjeru (može i na produženom) neke kružnice, koja se kotrlja (bez sklizanja) po jednom pravcu u ravnini. Krivulja je periodična. Može biti *obična, skraćena* i *produžena,* prema tome da li je tačka radijusa na kružnici, unutar kružnice ili izvan kružnice (na produženom polumjeru) (sl. 51). Obična

C. 1. Cikloida



Sl. 51

cikloida u parametarskom obliku: $x = r(t - \sin t)$, $y = r(1 - \cos t)$.

Epicikloida, krivulja koju opisuje tačka kružnice koja se kotrlja bez klizanja po drugoj kružnici izvana. Pomoću te krivulje stari su grčki matematičari tumačili gibanje planeta. Jednadžba u parametarskom obliku:

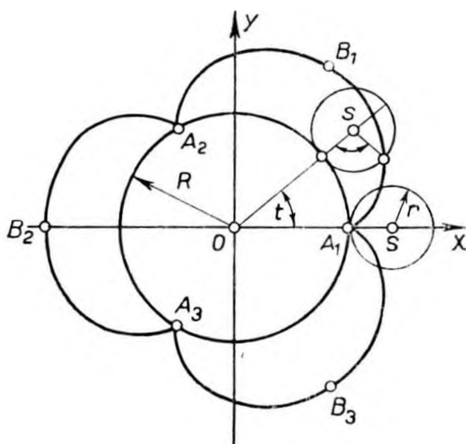
$$x = (R + r) \cdot \cos t - r \cdot \cos \frac{R + r}{r} t;$$

$$y = (R + r) \cdot \sin t - r \cdot \sin \frac{R + r}{r} t$$

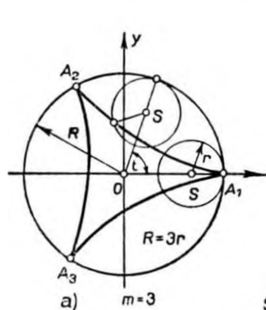
(R polumjer nepokretne kružnice, r pokretne, oblik ovisi o omjeru $\frac{R}{r} = m$). Za $m = 1$ prelazi u *kardioidu* (v. B. 2); za $m = 3$ v. sl. 52. I epicikloida može biti *skraćena* ako se promatra tačka na polumjeru, a i *produžena*, ako se promatra tačka na produženju polumjera.

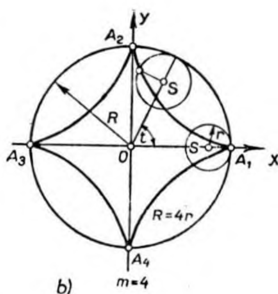
Hipocikloida, krivulja koju opisuje tačka kružnice koja se kotrlja po drugoj kružnici s unutrašnje strane. Specijalni oblici te krivulje ovise o odnosu polumjera obiju kružnica. Ako je $R = 3r$, nastaje *Steinerova* (Štajnerova) hipocikloida sa tri šiljka (sl. 53a). Ako je $R = 4r$, nastaje *astroida* sa četiri šiljka (sl. 53 b). Za $m = 3$ jednadžba: $x = r(2 \cos t + \cos 2t)$, $y = r(2 \sin t - \sin 2t)$. Za $m = 4$ jednadžba: $x = R \cos^3 t$, $y = R \sin^3 t$; u pra-

E 2 Epicikloida



Sl. 52



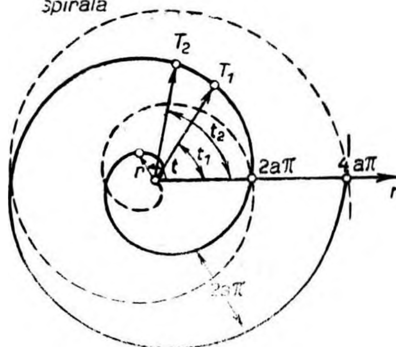


Sl. 53

vokutnim koordinatama: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$. Hipocikloida može biti i *skraćena* (tačka na polumjeru) i ***produžena*** (tačka na produženju polumjera).

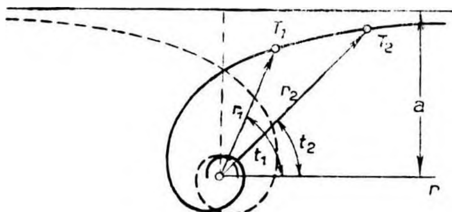
Spirale.

Arhimedova spirala je transcendentna krivulja. Ona nastaje kad tačka polazeći iz ishodišta jednoliko obilazi ishodište i jednoliko se udaljuje od njega. Udaljenost svake tačke Arhimedove spirale od ishodišta proporcionalna je s kutom zaokreta t, pa je $r = at$ jednadžba u polarnim koordinatama. Krivulja se sastoji od dvije grane (sl. 54).



Sl. 54

Hiperbolička spirala. Jednadžba u polarnim koordinatama: $r = \frac{a}{t}$ ili $rt = a$. Sastoji se od dvije grane simetrično položene s obzirom na os y. Imaju asimptotu $y = a$. Ishodište je asimptotska tačka (sl. 55).



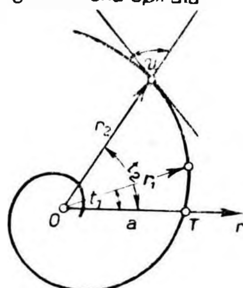
Sl. 55

Logaritamska spirala, krivulja koja presijeca sve zrake koje izlaze iz jedne tačke O pod jednim te istim kutom. Jednadžba u polarnim koordinatama: $r = a \cdot e^{kt}$, ($k = \text{ctg } u$ ili $\text{tg } u = \frac{1}{k}$, gdje je taj kut u uzduž cijele spirale konstantan). Pol O je asimptotska tačka krivulje (sl. 56).

Neke druge krivulje.

Lančanica, krivulja takvog oblika kakav poprima pod djelovanjem sile teže, savršeno savitljiva i nerastezljiva materijalna nit kad je obješena o dvije

D. 3. Logaritamska spirala

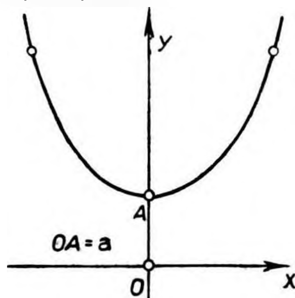


Sl 56

čvrste tačke (sl. 57). Jednadžba lančanice u pravokutnim koordinatama glasi: $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$.

Krivulja je simetrična s obzirom na os y.

E. 1. Lančanica



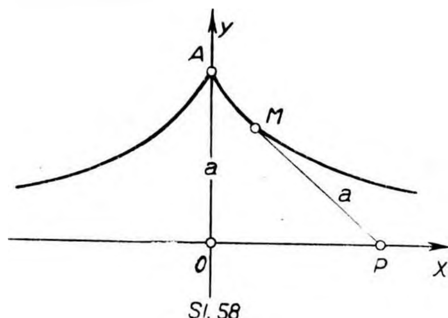
Sl. 57

Traktriks, krivulja za koju je duljina segmenta na tangenti od dirališta M do presjecišta P s danim pravcem (os x) konstantna veličina (a). Jednadžba:

$$x = a \cdot \ln \frac{a \pm \sqrt{a^2 - y^2}}{y} \mp \sqrt{a^2 - y^2}$$

Krivulja je simetrična prema osi y, a os x je asimptota (sl. 58).

E.2 Traktriks



Sl. 58

Gaussova krivulja, definirana jednadžbom

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Simetrična je s obzirom na os y i asimptotski se približava x-osi, kad x teži prema $+\infty$ i $-\infty$. Ova se krivulja zbog svoje primjene u računu vjerojatnosti naziva i *krivulja vjerojatnosti* (v. Statistika).

Aproksimativne krivulje. U raznim granama nauke često se dobiva skup pridruženih vrijednosti dviju varijabli bilo promatranjem bilo eksperimentiranjem. Tada je važno da se nađe jednadžba koja će na zadovoljavajući način *aproksimirati* dobivenu tablicu vrijednosti. Takve se jednadžbe zovu *empiričke jednadžbe*, a rezultat je *aproksimativna krivulja*. Sami tipovi krivulja mogu biti: *linearni tip* $y = ax + b$, *parabolički tip* $y = ax^2 + bx + c$, *eksponencijalni tip* $y = ab^x$, *tip potencija* $y = ax^n$, i dr. Prema broju parametara u jednadžbi načini se i toliko grupa podataka, pa se za pojedine grupe izračunaju srednje vrijednosti x_s za podatke x, i srednje vrijednosti y_s za y. Npr. kod linearnog tipa načine se dvije grupe podataka i nađu dvije srednje vrijednosti $(x_{s1}; y_{s1})$ i $(x_{s2}; y_{s2})$, pa se upotrijebi jednadžba pravca kroz dvije tačke, tj.

$$y - y_{s1} = \frac{y_{s2} - y_{s1}}{x_{s2} - x_{s1}} (x - x_{s1})$$

Kada se to sredi, dobije se jednadžba, tj. aproksimativni pravac.

Npr. kod tipa potencija $y = ax^n$ ponajprije se logaritmiranjem dobiva $\log y = \log a + n \cdot \log x$, pa se supstituira $\log x = u$ i $\log y = v$ (a to znači da se za vrijednosti u tabeli uzmu logaritmi), i dobiva se $v = n \cdot u + \log a$. Time se dobila linearna relacija između u i v.

Ove aproksimativne krivulje, pod nazivom *trend*, igraju važnu ulogu u *statistici*.

KRIVULJA VJEROJATNOSTI, v. Statistika.

KRIVULJAR, pomoćna sprava za crtanje (v. Geometrijsko crtanje).

KRNJA PIRAMIDA, v. Piramida.

KRNJI STOŽAC, v. Stožac.

KRUG, dio ravnine omeđen *kružnicom* koja se zove kružna *periferija* ili *obodnica.* Radijus, dijametar i tetive obodne kružnice ujedno su isti elementi pripadnog kruga. Promjer dijeli krug na dva jednaka *polukruga. Kružni segment* ili *odsječak* dio je kruga omeđen tetivom i jednim od pripadnih lukova. *Kružni sektor* ili *isječak* dio je kruga omeđen sa dva polumjera i pripadnim lukom. *Kružni vijenac* ili *prsten* dio je kruga omeđen dvjema koncentričnim kružnicama ($r_1 > r_2$). Dužina $r_1 - r_2$ zove se *širina* kružnog vijenca. *Isječak kružnog vijenca* dio je kružnog vijenca između dva veća polumjera. Krugovi jednakih polumjera zovu se *jednaki krugovi.* Dva su kruga *sukladna* ako imaju jednake polumjere.

Površina kruga i njegovih dijelova, v. Površine likova.

KRUŽNICA, skup svih tačaka u ravnini koje su jednako udaljene od jedne čvrste tačke *(središte, centar).* Dužina koja spaja središte s bilo kojom tačkom kružnice zove se *polumjer* ili *radijus* (r). Spojnica dviju tačaka na kružnici zove se *tetiva.* Tetive koje prolaze središtem zovu se *promjeri* ili *dijametri* ($2r$). Dijametar svojim krajnjim tačkama dijeli kružnicu na dvije *polukružnice.* Svaka tetiva svojim krajnjim tačkama dijeli kružnicu na dva

dijela koji se zovu *lukovi kružnice* ili *kružni lukovi.* Za manji od tih lukova obično se kaže da je pridružen tetivi. Jednakim (većim) lukovima iste kružnice (ili jednakih kružnica) pripadaju jednake (veće) tetive. Vrijedi i obratno. Na tome se osniva grafičko zbrajanje i oduzimanje lukova.

Ako je *središnja udaljenost* neke tačke s obzirom na zadanu kružnicu manja, jednaka odnosno veća od polumjera, ta se tačka nalazi u kružnici, na kružnici, odnosno izvan kružnice.

Pravac prema kružnici može imati tri različita položaja. Pravac može sjeći kružnicu u dvije tačke *(sjecišta),* tada je on njena *sječica* ili *sekanta;* ako ima jednu tačku zajedničku *(dirališta),* zove se *tangenta* (v. Geometrijske konstrukcije); ako nema zajedničkih tačaka, on se nalazi *izvan* kružnice.

Kružnica je jednoznačno određena sa svoje tri tačke. Zato se vrhovima trokuta može položiti samo jedna kružnica. To je *opisana kružnica.* Kružnica ima beskonačno mnogo osi simetrije, jer svaki pravac koji prolazi središtem kružnice jeste *os simetrije.* Centralno je simetrična s obzirom na središte kao *centar simetrije.*

Udaljenost središta dviju kružnica zove se *središnja* ili *centralna udaljenost* (c), a pravac koji spaja središta zove se *centrala.* Ako su R i r polumjeri dviju kružnica, i ako je $R > r$, onda postoje ove mogućnosti:

$c = 0$, onda dvije kružnice imaju isto središte i zovu se *koncentrične*

$0 < c < R - r$, jedna je unutar druge
$c = R - r$, dodiruju se iznutra
$R - r < c < R + r$, sijeku se u dvije tačke
$c = R + r$, dodiruju se izvana
$c > R + r$, jedna je izvan druge

} *ekscentrične*

Središnji kut je kut kome se vrh nalazi u središtu kružnice. Pripada mu tetiva i luk na kružnici. Jednakim središnjim kutovima iste kružnice (ili jednakih kružnica) pripadaju jednake tetive i jednaki lukovi. Vrijedi i obratno. *Obodni* ili *periferijski kut* je onaj kome vrh leži na kružnici a kraci su mu tetive. Luk kružnice koji se nalazi u obodnom kutu zove se *pripadni luk* obodnog kuta. Svakom obodnom kutu pripada samo jedan središnji kut, a svakom središnjem kutu beskonačno mnogo obodnih kutova. Svaki obodni kut je polovina pripadnog središnjeg kuta. Svi obodni kutovi nad promjerom pravi su *(Talesov poučak)*.

Iz tačke izvan kružnice mogu se povući dvije tangente (v. Geometrijske konstrukcije). Dužina od tačke do dirališta zove se *dužina tangente*. Ako se tačkom (A) *unutar* kružnice povuku tetive, onda je produkt udaljenosti te tačke od oba sjecišta na svakoj tetivi (A_1, A_2 i B_1, B_2) uvijek jednak i konstantan, tj. $AA_1 \cdot AA_2 = AB_1 \cdot AB_2$. Ovaj se umnožak zove *potencija tačke A* s obzirom na kružnicu. Tačka može biti i *izvan* kružnice. Ako jedna sekanta prijeđe u tangentu, tada je $AT^2 = AA_1 \cdot AA_2$ (T je diralište, AT je dužina tangente, AT^2 je potencija).

Potencijala (radikala, kordala) dviju kružnica je skup svih tačaka koje imaju jednaku potenciju s obzirom na obje kružnice. Potencijala dviju kružnica je pravac koji stoji okomito prema centrali, tj. ona zajednička sekanta (tangenta) ako se kružnice sijeku (diraju). Ako se iz tačke P povuku tangente na kružnicu, pa se diralištima povuče sekanta, onda se ta sekanta zove *polara* tačke P, sama tačka zove se *pol*. Ako je pol unutar kružnice, onda se njegova polara nalazi izvan kružnice. Ako je pol u središtu kružnice, njegova je polara u beskonačnosti. Ako je pol na samoj kružnici, onda je njegova polara tangenta u istoj tački kružnice.

Opseg kružnice, v. Opseg.

KRUŽNICA U ANALITICI, kružnica obrađena metodom analitičke geometrije (v. Analitička geometrija.

Jednadžba kružnice. Kako je kružnica skup svih tačaka u ravnini kojima je stalna udaljenost od jedne čvrste tačke, pa ako su x i y koordinate bilo koje tačke T na kružnici, tada je: $x^2 + y^2 = r^2$ ili $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Toj jednadžbi zadovoljavaju sve tačke $(x; y)$ kružnice, ali i obrnuto: svaka tačka $(x; y)$, za koju vrijedi ta jednadžba, leži na kružnici. Zato je to *jednadžba (središnja* ili *centralna) kružnice.* Ako za neku tačku T_1 $(x_1; y_1)$ izlazi da je $x^2_1 + y^2_1 > r^2$, tačka T_1 je izvan kružnice; ako je $x^2_1 + y^2_1 < r^2$, tada je tačka T_1 unutar kružnice.

Opća jednadžba kružnice. Ako je središte u tački koja ima koordinate p i q, a tačka T $(x; y)$ jeste ma koja tačka kružnice, tada je po formuli za udalje-

nost dviju tačaka: $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$. To je *opća jednadžba kružnice.* Ako je $p = 0$, središte leži na osi y, pa jednadžba ima oblik: $x^2 + (y - q)^2 = r^2$; ako je $q = 0$, središte je na osi x, pa je: $(x - p)^2 + y^2 = r^2$. Ako kružnica sa središtem u I kvadrantu dira koordinatne osi, tj. $p = q = r$, jednadžba glasi: $(x - r)^2 + (y - r)^2 = r^2$. Ako je $p = r$ i $q = 0$, onda se dobije *vršna jednadžba kružnice:* $y^2 = 2rx - x^2$

Opća jednadžba drugog stepena: $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ znači realnu kružnicu ako je $A = C \neq 0$, $B = 0$, $D^2 + E^2 > 4AF$. Tada se jednadžba može pisati i ovako: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, odakle se dobiva normalan oblik:
$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = 0,$$ uz uvjet da je $a^2 + b^2 > 4c$. Tada su koordinate središta $p = -\frac{a}{2}$, $q = -\frac{b}{2}$, $r^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4} = p^2 + q^2 - c$

Kružnica trima tačkama. Ako su zadane tri tačke $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$, $(x_3; y_3)$, a jednadžba treba da glasi $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, onda se uvrštavajući koordinate tačaka u jednadžbu dobije sistem triju jednadžbi s tri nepoznanice a, b, c:

$$x^2_1 + y^2_1 + ax_1 + by_1 + c = 0$$
$$x^2_2 + y^2_2 + ax_2 + by_2 + c = 0$$
$$x^2_3 + y^2_3 + ax_3 + by_3 + c = 0$$

Odavde se rješavanjem nađu vrijednosti parametra a, b, c.

Položaj pravca prema kružnici. Ovisi o udaljenosti d središta zadane kružnice od zadanog pravca $p \equiv ax + by + c = 0$. Ako je $d < r$, pravac siječe kružnicu *(sekanta)*. Ako je $d = r$, pravac tangira *(tangenta)*. Ako je $d > r$, pravac je izvan kružnice.

Uvjetna jednadžba za dodir. Ako je jednadžba pravca $p \equiv y = mx + n$ i kružnice $x^2 + y^2 = r^2$, onda, ako je $r^2 (m^2 + 1) - n^2 > 0$, postoje dvije realne i različite zajedničke tačke pravca i kružnice (slučaj *sekante*); ako je $r^2 (m^2 + 1) - n^2 < 0$, pravac i kružnica nemaju realnih zajedničkih tačaka; ako je $r^2 (m^2 + 1) - n^2 = 0$ ili $r^2 (m^2 + 1) = n^2$, oba presjecišta padaju u jednu tačku, sekanta prelazi u *tangentu*. Tu imamo tzv. *uvjetnu relaciju* da pravac $y = mx + n$ bude tangenta kružnice $x^2 + y^2 = r^2$

Jednadžba tangente u zadanoj tački $(x_1; y_1)$ kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ glasi: $xx_1 + yy_1 = r^2$. Ako je kružnica $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$, onda je jednadžba tangente: $(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2$. Ako je kružnica $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$, onda je jednadžba tangente: $xx_1 + yy_1 + a\frac{x + x_1}{2} +$

$$+ b\frac{y + y_1}{2} + c = 0$$

Potencijala dviju kružnica. Oduzimanjem kvadratnih jednadžbi kružnica $k_1(x; y) = 0$ i $k_2(x; y) = 0$, tj. $k_1 - k_2$, dobiva se linearna jednadžba u x i y. Pravac $k_1 - k_2 = 0$ zove se *potencijala* ili *kordala* tih kružnica.

Polara. Pravac koji spaja dirališta obiju tangenata povučenih iz tačke T_0 $(x_0;\ y_0)$ na kružnicu $x^2 + y^2 = r^2$ zove se *polara.* Tačka T_0 zove se *pol* te polare. Jednadžba polare glasi: $x_0x + y_0y = r^2$. Ako je jednadžba kružnice $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$, onda polara tačke T_0 $(x_0;\ y_0)$ glasi: $(x_0-p)\,(x-p) + (y_0 - q)\,(y - q) = r^2$

Pramen kružnice. Ako su $k_1\,(x;\ y) = 0$ i $k_2\,(x;\ y) = 0$ dvije kružnice, tada jednadžba $k_1\,(x; y) + p \cdot k_2\,(x; y) = 0$, gdje je p proizvoljan parametar, prikazuje sve kružnice pramena.

KUBATURA, postupak kojim se izračunava volumen (obujam, zapremina) omeđenog dijela prostora, a rješava se općenito primjenom *integralnog računa.* U specijalnim slučajevima, kao što su izračunavanja volumena npr. prizme, piramide, valjka, stošca, kugle i njihovih dijelova, dostatne su i metode elementarne geometrije (v. Obujam).

KUBIK, isto što i kubični metar (1 m^3) (v. Sistemi mjera).

KUBIRANJE, v. Potenciranje.

KUBNI KORIJEN, v. Korjenovanje.

KUBNI (KUBIČNI) **METAR,** kocka koja ima brid 1 m (v. Sistemi mjera).

KUGLA, geometrijsko tijelo omeđeno plohom kojoj su sve tačke jednako udaljene od jedne čvrste tačke koja se zove *središte* (v. Plohe). Ova ploha nastaje rotacijom polukružnice oko svojeg promjera. Središte, polumjer i promjer te polukru-

žnice ujedno su središte, *polumjer* i *promjer* izvedene kugline plohe i kugle.

Tačka s obzirom na kuglu može biti u kugli, na kugli i izvan, prema tome da li je njena udaljenost od središta manja, jednaka ili veća od polumjera. Svaki presjek kugline plohe ravninom jeste *kružnica*. Ako je S središte, a R polumjer kugle i ako je S_1 središte kružnice u presječnoj ravnini i njen polumjer r, nadalje udaljenost $SS_1 = d$, onda je $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

Diskusija: 1. Ako je $d = 0$, tada je $r = R$, ravnina prolazi središtem kugle. To je *glavna* ili *dijametralna ravnina* koja siječe kuglu u *glavnom krugu* (omeđenom *glavnom kružnicom*). Kružnica na kuglinoj plohi kojoj je polumjer manji od polumjera kugle zove se *sporedna kružnica;* ona omeđuje *sporedni krug.* 2. Ako je $d = R$, tada je $r = 0$, pa ravnina s kuglom ima samo jednu zajedničku tačku, i okomita je na polumjer kugle u toj tački. Ta se ravnina zove *dirna* ili *tangencijalna ravnina.* U svakoj tački kugline plohe može se položiti samo jedna tangencijalna ravnina, a svaki pravac koji se nalazi u tangencijalnoj ravnini i prolazi diralištem ravnine jeste *tangenta kugle.* 3. Ako je d veće od R, ravnina se nalazi izvan kugle.

Pravac probada kuglinu plohu najviše u dvije tačke. Trima tačkama na kuglinoj plohi prolazi samo jedna kružnica. Krajnje tačke pripadnog dijametra koji je okomit na ravnini te kružnice zovu se *polovi.* Svaki pol kružnice na kuglinoj plohi jednako je udaljen od svih tačaka te kružnice. Ako

kružnica nije glavna kružnica kugle, tada se kaže da je njoj pridružen onaj pol koji joj je bliži. Glavne polukružnice povučene na kugli, koja predočuje Zemlju, a spajaju polove, zovu se *meridijani.* Kružnice koje leže u ravninama okomitim na os (pravocrtnu spojnicu polova), zovu se *paralele.*

Kuglina ploha jednoznačno je određena sa četiri tačke koje ne leže u istoj ravnini. Ako se kugla presiječe ravninom koja prolazi središtem, dobiju se dvije *polukugle.* Ako ravnina ne prolazi središtem, dobiju se dva nejednaka *kuglina odsječka* ili *segmenta.* Dio kugline plohe na kuglinom segmentu zove se *kuglina kapica* ili *kalota.* Dio kugle koji se nalazi između dvije paralelne ravnine zove se *kuglin sloj.* Dio kugline plohe na kuglinom sloju zove se *kuglin pojas* ili *zona.*

Ako se dvije kugle prodiru, pripadne kugline plohe sijeku se u kružnici koja leži u ravnini što je okomita na spojnici središta tih kugli (središnja udaljenost ili centrala) i kojoj se središte nalazi na toj spojnici. Dvije kugline plohe koje imaju zajedničko središte zovu se *koncentrične,* a s različitim središtima *ekscentrične.* Na kuglinoj plohi može se izgraditi *sferna geometrija.*

Oplošje i *volumen* kugle i njezinih dijelova, v. Oplošje; Obujam.

KUGLINA PLOHA, v. Kugla; Plohe.

KUPA, v. Stožac.

KUT, geometrijski lik što ga čine dvije zrake koje imaju zajedničku početnu tačku.

Kut u ravnini. Vrti li se u ravnini zraka SA oko svoje čvrste početne tačke S, pa dođe u položaj SB, kaže se da zrake SA i SB čine *kut* ili da zatvaraju kut. Veličina kuta određuje se veličinom rotacije. Mjerenje kuta (v. Sistemi mjera). Tačka S zove se *vrh* ili *tjeme kuta,* a zrake SA i SB *kraci* tog kuta.

Uspoređivanje kutova. Povuče li se iz vrha S luk $\overset{\frown}{AB}$, a iz drugog vrha S_1 s istim otvorom šestara luk $\overset{\frown}{A_1B_1}$, pa ako je $AB = A_1B_1$ (tetive), onda je kut ASB jednak kutu $A_1S_1B_1$; ako je $AB > A_1B_1$, onda je kut $ASB >$ kut $A_1S_1B_1$ (ili obrnuto).

Prenošenje kuta, v. Geometrijske konstrukcije.

Kaže se da je kut *pozitivan* ako mu je smjer vrtnje suprotan smjeru gibanja kazaljke na satu. U protivnom je *negativan.*

Zraka koja dijeli kut na dva jednaka dijela, ili skup svih tačaka koje su jednako udaljene od krakova kuta zove se *raspolovnica, bisektrisa* ili *simetrala kuta* (v. Geometrijske konstrukcije).

Vrste kutova. Ako se zraka vrti u ravnini oko početne tačke i dođe opet u početni položaj, izvede *puni kut.* Polovina punog kuta zove se *ispruženi kut.* Četvrtina punog kuta zove se *pravi kut.* Ako je kut manji od pravog, zove se *šiljast* ili *oštar kut.* Ako je kut veći od pravog, a manji od ispruženog kuta, zove se *tupi kut.* Za šiljast, pravi, tupi i ispruženi kut kaže se da su to *konveksni kutovi.* Ako je kut veći od dva prava a manji od četiri prava, zove se *konkavan kut.*

Crtanje nekih kutova (v. Geometrijske konstrukcije).

Ako se kutu produži jedan krak preko vrha, dobiva se kut koji se zove *sukut*. Suma kuta i pridruženog mu sukuta iznosi 180°. Dva kuta koji imaju zajednički vrh, a po dva im se kraka nadopunjuju na pravac, zovu se *vršni kutovi*. Po dva vršna nasuprotna kuta međusobno su jednaka. *Komplementni kutovi* su oni koji se nadopunjuju na pravi kut, dakle njihova suma iznosi 90°. *Suplementni kutovi* su ona dva kuta koji se nadopunjuju na ispruženi kut, dakle njihova suma iznosi 180°. *Središnji* i *obodni kutovi* (v. Kružnica).

Pravac koji siječe dva druga pravca zove se *transverzala* tih pravaca, i čini osam kutova. Kutovi uz transverzalu unutar dva pravca zovu se *unutarnji*, a ostali su *vanjski kutovi*. Ovi kutovi mogu biti: 1. *prikuti*, tj. po dva vanjska ili po dva unutarnja kuta uz transverzalu, koji leže na istoj strani, a nemaju zajednički vrh; 2. *izmjenični kutovi*, tj. po dva vanjska ili po dva unutarnja kuta s protivnih strana transverzale, koji nemaju zajednički vrh; 3. *protukuti*, tj. po dva kuta uz transverzalu, jedan unutarnji a drugi vanjski, koji leže s iste strane transverzale, a nemaju zajednički vrh. Ako su dva protukuta ili dva izmjenična kuta jednaka, ili dva prikuta suplementna, onda su pravci međusobno usporedni. Vrijedi i obratno.

Kut u prostoru. Kut dvaju *mimosmjernih* pravaca a i b određen je kutom dvaju pravaca a_1 i b_1 koji prolaze jednom tačkom V, uz to je $a_1 \parallel a$ i $b_1 \parallel b$. Ako su kraci dvaju kutova u prostoru usporedni i istog smjera, oni su međusobno jednaki.

Isto je ako su kraci suprotnog smjera. Ako su kraci dvaju kutova usporedni, ali po dva istoga, a druga dva suprotnog smjera, ti su kutovi suplementni. Dva kuta s uzajamno okomitim kracima jednaka su ako su oba šiljasta ili oba tupa, suplementni su ako je jedan od njih šiljast, a drugi tup. Šiljasti kut, što ga pravac čini sa svojom ortogonalnom projekcijom u ravnini projekcije, zove se *kut pravca i ravnine,* to je *prikloni kut.* Kut dviju ravnina je kut diedar, što ga čine te dvije ravnine.

Zraka koja ide iz oka do neke tačke predmeta zove se *doglednica.* Kut između dvije doglednice zove se *vidni kut.* Ako je jedan krak vidnog kuta horizontalan, a drugi leži u vertikalnoj ravnini, ali iznad horizontalne ravnine, taj se kut zove *kut elevacije.* Ako je jedan krak vidnog kuta horizontalan, a drugi leži u vertikalnoj ravnini, ali ispod horizontalne ravnine, kut se zove *kut depresije.*

KUT DEPRESIJE, v. Kut.

KUT ELEVACIJE, v. Kut.

KUTOMJER, sprava za mjerenje kutova (v. Geometrijsko crtanje).

KVADAR, v. Prizma; Paralelopiped.

KVADRAT (pravilan četverokut), omeđen sa četiri jednake dužine *(stranice)* koje zatvaraju četiri prava kuta. Može se reći da je to *pravokutnik* s jednakim stranicama ili *romb* s pravim kutovima. Ima dvije međusobno okomite *dijagonale* koje se raspolavljaju. Osobitost mu je među četverokutima

što mu se može opisati i upisati kružnica sa zajedničkim središtem u sjecištu dijagonala. Kvadrat je simetričan lik sa četiri *osi simetrije:* dvije *simetrale stranica* i dvije *simetrale kutova.* Površina kvadrata stranice a je $P = a^2$, pa se prema tome u aritmetici druga potencija nekog broja zove kvadrat toga broja.

Opseg kvadrata, v. Opseg.

KVADRATNA FUNKCIJA, v. Funkcija.

KVADRATNA JEDNADŽBA, v. Jednadžba.

KVADRATNA NEJEDNADŽBA, v. Nejednadžbe.

KVADRATNI KORIJEN, v. Korjenovanje.

KVADRATURA, postupak kojim se izračunava površina nekog dijela ravnine. Formule za površine zatvorenih ravnih likova omeđenih pravcima ili kružnim lukovima određuju se pomoću metoda elementarne geometrije (v. Površine), a za izračunavanje površine likova omeđenih lukovima ma kakvih krivulja primjenjuje se *integralni račun.*

KVADRATURA KRUGA, problem u kome se traži da se samo pomoću ravnala i šestara konstruira kvadrat po površini jednak krugu. Nakon mnogih pokušaja, istom je u XIX st. dokazano da je problem uz te uvjete nerješiv. To dolazi odatle što je π transcendentan broj.

KVADRIKE, algebarske plohe drugog stepena (v. Analitika).

KVADRIRANJE, v. Potenciranje.

KVOCIJENT, v. Dijeljenje.

L

LANČANICA, v. Krivulja.

LEIBNIZ, Gottfried Wilhelm (Lajbnic, 1646—1716), njemački filozof i matematičar. Mnoga otkrića i radovi iz područja fizike, matematike i logike. U logiku je pokušao uvesti egzaktni matematički postupak svojim logičnim računom (Calculus logicus). Pronalaskom diferencijalnog i integralnog računa učinio je prekretnicu u nauci. Došao je do otkrića proučavajući problem tangente na krivulje. Danas je prihvaćena Leibnizova simbolika za derivaciju.

LEMNISKATA, v. Krivulja (Cassinijeve krivulje).

L'HUILIEROVA FORMULA, v. Sferna trigonometrija.

LIBELA, sprava za određivanje horizontalnog položaja.

LIMES, v. Granična vrijednost.

LINEARNA FUNKCIJA, v. Funkcija; Pravac u analitici.

LINIJA, v. Krivulja.

LOBAČEVSKI, Nikolaj Ivanovič (1792—1856), ruski matematičar. Poput mnogih pokušao je i on dokazati Euklidov postulat o paralelama. Međutim, uskoro otkriva uzaludnost toga pokušaja. 1829/30. objavljuje svoj rad *O elementima geometrije.* Dokazao je da se pretpostavka o tome da je kroz jednu tačku izvan pravca moguće povući više pravaca koji zadani pravac ne presijecaju, ne može dovesti u protivurječnost i da se, dapače, polazeći od te tvrdnje može logički razviti cijela jedna geometrija različita od Euklidove. Iako nailazi na nerazumijevanje suvremenika, on dalje razvija svoju teoriju i primjenjuje je. Tako su nastala djela: *Imaginarna geometrija* (1835), *Pangeometrija* (1855) i dr. Lobačevski je dao značajnih radova i u ostalim granama matematike.

LOGARITAMSKA SPIRALA, v. Krivulja.

LOGARITAMSKE TABLICE, v. Logaritmiranje.

LOGARITAMSKO RAČUNALO (LOGARITMAR), naprava na kojoj je u stvari iskorištena logaritamska *funkcijska skala.* Na logaritamskom računalu dvije su logaritamske skale, mehaničkim pomicanjem mogu se računske operacije svesti na očitavanje logaritama, i obrnuto. Logaritamsko računalo služi za brzo izvođenje množenja, dijeljenja i potenciranja brojeva i dr. Na nekim logaritmarima osim logaritamske skale nalaze se još i druge funkcijske skale, npr. trigonometrijske funkcije, i dr. Računanje se obavlja na osnovu poučaka o

logaritmima, prema kojima se množenje pretvara u zbrajanje, itd. Kako su to funkcijske skale, obavlja se zapravo samo očitavanje.

LOGARITMAND, v. Logaritmiranje.

LOGARITMIRANJE, inverzna operacija potenciciranja (v. Potenciranje). Ako vrijedi jednakost $N = b^x$, onda se uz zadano N traženje eksponenta x zove *logaritmiranje* broja N. Eksponent se tada zove *logaritam* broja N po bazi b, i piše se $\log_b N = x$. Ako je pak zadano x, tada se traženje broja N iz x zove *antilogaritmiranje* broja x. Broj N u $\log_b N$ je *logaritmand* ili *numerus.* Ako je riječ o prikazivanju broja N kao potencije s bazom 10, onda je logaritam broja N eksponent s kojim treba potencirati bazu 10 da se dobije broj N. Baza logaritma može biti svaki pozitivan broj različit od 1. Vrijedi: $b^{\log_b N} = N$

Svojstva: $\log (ab) = \log a + \log b$; $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$; $\log a^n = n \cdot \log a$; $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a$.

Sve ovo vrijedi za bilo koju bazu. Napose: $\log_b b = 1$; $\log_b \frac{1}{b} = -1$; $\log_b 1 = 0$; $\log_b \infty = \infty$; $\log_b 0 = -\infty$ za $b > 1$.

Ako se broj 10 uzima kao baza, onda su to *obični* ili *Briggsovi* ili *dekadski* logaritmi, i piše se $\log N$ bez oznake baze. Upotrebljavaju se u praktičnom

računanju. Ako se broj e uzme kao baza, onda su to *prirodni logaritmi* ili *Neperovi logaritmi,* piše se $\ln N$, pa je $e^{\ln N} = N$. Ovi se logaritmi upotrebljavaju u matematičkim teorijskim razmatranjima.

Iz $10^{\log N} = e^{\ln N}$ slijedi $\log N = \log e \cdot \ln N = 0{,}434\,29 \cdot \ln N$. Po toj se relaciji iz prirodnih logaritama dobiju dekadski množenjem sa 0,435 29.

Obrnuto: $\ln N = \dfrac{\log N}{\log e} = 2{,}302\,59 \cdot \log N$.

Vrlo je jednostavno naći logaritme dekadskih jedinica. Kako je $100 = 10^2$; $0{,}01 = \dfrac{1}{100} = \dfrac{1}{10^2} = 10^{-2}$; ..., to je $\log 100 = 2$; $\log 0{,}01 = -2$; .... Svaki pozitivan broj N koji nije dekadska jedinica nalazi se između dvaju susjednih dekadskih jedinica. Najveći cijeli broj koji ne premašuje broja $\log N$ zove se *karakteristika* (K), a preostali dio broja $\log N$ zove se *mantisa* (m). Prema tome je $\log N = K + m$. Ako se dva decimalna broja a i b razlikuju samo po položaju njihovog decimalnog zareza, tada ta dva broja imaju istu mantisu. Karakteristika se pak određuje ovako: ako je broj veći od jedan, tada je karakteristika logaritma tog broja za 1 manja od broja cijelih mjesta; ako je broj manji od jedan (0,...), tada logaritam tog broja ima negativnu karakteristiku. Ona je jednaka broju nula ispred prve znamenke koja vrijedi. Ta se karakteristika piše iza mantise. Npr. $\log 0{,}0002 = 0{,}301\,03 - 4$. Mantise se očitavaju iz *logaritamskih tablica,* jer je logaritmiranje transcendentna operacija koja je direktno teško izvodljiva. U prak-

si se mnogo upotrebljava ***logaritamsko računalo.*** Inače se mantise izračunavaju pomoću postupaka više matematike.

Logaritamska funkcija $y = \log x$ i *logaritamska krivulja* (v. Funkcija).

LOPTA, v. Kugla.

LUČNI ELEMENT (ELEMENT LUKA), v. Diferencijalni račun.

LUDOLFOV BROJ, naziv za neperiodski beskonačni decimalni broj: 3, 141 592 653 589 793 238 462 643 383 279 502 884 . . . , koji se označava sa π (grč. slovo pi), a kaže koliko je puta opseg kruga veći od njegovog promjera. Naziv je dobio prema holandskom matematičaru *Ludolfu van Ceulenu* (1540—1610), koji je taj broj odredio na 35 decimala.

Arhimed je dao relaciju $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Do otkrića infinitezimalnog računa izračunavao se broj π pomoću opsega opisanih i upisanih pravilnih mnogokuta. Pomoću infinitezimalnog računa otkriveni su razni postupci za brže izračunavanje broja π. J. Machin (1706) odredio je π na 100 decimala. Z. Dahse (1844) na 200, a Shanks (1873) na 707 decimala. F. Lindemann je (1882) dokazao da je π transscendentan broj i time skinuo s dnevnog reda problem *kvadrature kruga.* Danas je broj π uz upotrebu računskih električnih strojeva poznat na nekoliko tisuća decimala. U primjeni se taj broj uzima na onoliko decimala koliko traži priroda zadatka.

Kako se nađe konstrukcijom približna dužina koja odgovara broju π, v. Geometrijske konstrukcije.

LUK, dio krivulje (v. Kružnica). Ima svojstvo da je uvijek dulji od pripadne tetive, tj. od pravolinijske spojnice njegovih krajnjih tačaka. Izračunavanje duljine luka ili *rektifikacija* obavlja se pomoću *integralnog računa.*

M

MANTISA, decimalni dio logaritma; u širem smislu, kako je to uveo Gauss u svom djelu *»Disquisitiones«,* decimalni oblik pravog razlomka $\frac{m}{n}$. U tom slučaju mantisa ima konačan broj brojki ili se, za pojedini razlomak, karakteristična skupina brojki trajno ponavlja (tzv. *periodski decimalni razlomci).*

MATEMATIČKA INDUKCIJA, v. Indukcija.

MATEMATIČKI ZNAKOVI (SIMBOLI), upotrebljavaju se u matematici, a označuju odnos među matematičkim veličinama ili operaciju kojoj su podvrgnute matematičke veličine. Matematika ima do krajnjih granica razvijenu simboliku kojom može obuhvatiti sva pitanja i probleme svojih opširnih područja i operacija. Pri tome se ne smije miješati suština matematike s njenim simbolima, jer simboli sami po sebi nisu matematika. Matematiku sačinjavaju oni pojmovi i one operacije koje ti simboli predočuju. Oni pak nisu isprazni simboli, jer

u sebi združuju i samu suštinu, a što je važno, i sam proces i samu operaciju.

Odlike matematičkih simbola: kratkoća i jednostavnost; preglednost i praktičnost; konstantnost i preciznost; jednoznačnost; mogućnost proširenja od pojedinačnog na općenito, i obratno.

Matematički simboli mogu biti: *simboli za označivanje:* znamenke, tačke: $A, \ldots$, pravca: AB ili a, dužine: AB, vektora: $\vec{AB}$, trokuta: $\Delta\, ABC$, kutova: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, itd.; *simboli kojima se određuju činjenice* ili *odnosi:* $=, >, <, \neq, \sim, \cong, \parallel, \perp$, itd.; *operativni simboli:* znaci računskih operacija $+, -,$

$$\cdot\,,\ :,\ \sqrt{\ },\ \log,\ \frac{dy}{dx},\ \int,\ \sum,\ \binom{n}{r},\quad \text{itd.}$$

MATEMATIKA, nauka koja proučava prostorne oblike i količinske (kvantitativne) odnose među veličinama. Kao sve nauke, i matematika je nastajala iz praktičnih potreba ljudi. Iz konkretnih činjenica apstrakcijom se dolazi do preciznih matematičkih pojmova. Apstraktnost je upravo ono što karakterizira matematiku. Apstraktni karakter matematičkih pojmova i općenitost njezinih metoda i dovodi do toga da se matematika široko primjenjuje u najrazličitijim područjima nauke i tehnike, svagdje tamo gdje prostorne forme i količinski odnosi čine realan sadržaj pojave. Danas postoje mnoge matematičke discipline. U moderno doba, pod utjecajem novih istraživanja, nastale su i neke nove grane matematike.

MENELAJEV TEOREM, odnosi se na trokut: stranice trokuta presječene bilo kojom transverzalom podijeljene su sjecištima *A'*, *B'* i *C'* u određenim djelišnim omjerima kojih produkt iznosi uvijek —1, tj. $\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'C} = -1$. Ovaj teorem bio je poznat već *Euklidu.* Menelaj je pokazao da analogan teorem vrijedi i za sferni trokut.

METACENTAR (TEŽIŠTE), v. Trokut.

METRIČKA GEOMETRIJA, proučava svojstva prostora u kojem je uvijek određena udaljenost između dvije tačke. Projektivna geometrija nije metrička, dok je euklidska geometrija metrička. Proučavanje geometrijskih svojstava prostora na osnovu dane metrike prvi je u geometriju uveo njemački matematičar *B. Riemann.*

METRIČKI SISTEM, internacionalni decimalni sistem mjera koji se osniva na standardnom metru i standardnom kilogramu. Nastao je u Francuskoj potkraj XVIII st. (v. Sistemi mjera).

MIKRON (μ), 0,001 mm.

MILI, prefiks u složenicama znači tisućinu neke mjerne jedinice. Npr. milimetar = tisući dio metra, itd. (v. Sistemi mjera).

MILIJARDA = 1 000 000 000 = 10^9, tj. tisuću milijuna.

MILIJUN, viša dekadska jedinica, naziv za broj 1 000 000 = 10^6; tisuću tisuća.

MILIMETAR (mm), jedinica za mjerenje dužina, tisući dio metra (v. Sistemi mjera).

MILIMIKRON (mμ), jedinica za mjerenje dužina, tisućina mikrona ili 10^{-6}.

MINOR, v. Determinanta.

MINUEND, v. Oduzimanje.

MINUS (—), v. Oduzimanje; »Algebarski« brojevi.

MJERENJE KUTA, v. Sistemi mjera.

MJERENJE LUKOVA, v. Sistemi mjera.

MJERENJE NA TERENU, v. Terensko mjerenje.

MJERENJE VELIČINA, postupak da se nađe koliko se neka po volji uzeta istovrsna veličina kao jedinica nalazi u dotičnoj veličini. Sve ono što se može uspoređivati ili što se može mjeriti i dijeliti zove se *veličinom*. Veličine se mogu dijeliti *neograničeno*, odnosno kaže se, veličina ima *bezgraničnu djeljivost*. Za veličinu se istom tada može reći da je jednaka, veća ili manja od neke druge istovrsne veličine, i tačno reći kolika je, kad se usporedi s nekom određenom istovrsnom veličinom, tzv. *jedinicom mjerenja* ili *mjernom jedinicom*. Kad se uspoređuje neka veličina s istovrsnom veličinom uzetom za jedinicu mjerenja, kaže se da se veličina *mjeri*. Broj koji kazuje koliko se puta mjerna jedinica nalazi u zadanoj veličini zove se *mjerni broj*. Za svaku vrstu veličina postoji nekoliko jedinica, koje su veće ili manje. Pri tome je potrebno znati *redukcioni broj (pretvornik)*, tj. broj koji pokazuje

koliko je manjih jedinica sadržano u jednoj većoj. Mjerenjem se dolazi do *razlomaka.*

Iz osnovne jedinice metra izvedene su ostale mjere koje čine tzv. *metrički sistem mjera.* Mjere za vrijeme i mjere za kutove nisu u skladu s dekadskim sistemom brojeva (v. Sistemi mjera).

MJERITI, znači uspoređivati neku veličinu s istovrsnom veličinom uzetom za jedinicu mjerenja; ili mjeriti neku veličinu znači naći koliko se puta mjerna jedinica nalazi u toj veličini (v. Mjerenje veličina).

MJEŠOVIT BROJ, v. Razlomci.

MNOGOKUT (POLIGON, VIŠEKUT), ravan zatvoren lik omeđen dužinama *(stranice).* Zajednička tačka susjednih stranica zove se *vrh,* a ima ih koliko i stranica. Prema broju vrhova razlikuju se trokuti, četverokuti, ..., n-terokuti. Kut što ga zatvaraju dvije susjedne stranice zove se *unutrašnji kut.*

Dijagonala poligona je dužina koja spaja njegova dva vrha koji ne leže na istoj stranici. Ima li poligon n stranica, onda se iz svakoga njegovog vrha može povući $n - 3$ dijagonale. Poligon sa n stranica ima svega $\frac{(n-3) \cdot n}{2}$ dijagonala. Dijagonale povučene iz jednog vrha dijele n-terokut na $(n - 2)$ trokuta.

Zbroj unutrašnjih kutova u poligonu sa n stranica iznosi $(n - 2) \cdot 180^0$.

Pravilni poligoni su oni kojima su sve stranice jednake i svi kutovi jednaki. Svaki unutrašnji kut pravilnog poligona iznosi $\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}$

Svakom pravilnom poligonu može se *opisati i upisati kružnica* oko zajedničkog središta. *Karakteristični trokut* je jednakokračni trokut koji se dobije ako se središte S opisane kružnice pravilnom n-terokutu spoji s njegova dva susjedna vrha. Visina takvog trokuta jednaka je polumjeru upisane kružnice, a kraci su jednaki polumjeru opisane kružnice. Kut pri vrhu svakog karakterističnog trokuta ima $\frac{360^0}{n}$ i zove se *središnji kut* pravilnog poligona.

Ako je poligon s neparnim brojem stranica osnosimetričan lik, njegova os simetrije je simetrala jedne stranice i kuta koji je nasuprot toj stranici. Ako je poligon s parnim brojem stranica osnosimetričan lik, njegova os simetrije je ili zajednička simetrala dviju suprotnih stranica ili zajednička simetrala dvaju suprotnih kutova. Pravilan poligon ima toliko *osi simetrije* koliko ima stranica. Sve osi simetrije pravilnog poligona sijeku se u jednoj tački koja je jednako udaljena od svih stranica i jednako udaljena od svih vrhova toga poligona.

Dva su poligona *sukladna* ako se podudaraju u svim stranicama i svim kutovima. Dva su n-terokuta sukladna ako se podudaraju u $(2n-3)$ homo-

logna elementa. Dva su poligona *slična* ako se mogu međusobno pridružiti tako da su homologni kutovi jednaki, a homologne stranice proporcionalne.

Površina pravilnih poligona, v. Površine likova.

MNOŽENIK, v. Množenje.

MNOŽENJE (MULTIPLIKACIJA), treća osnovna računska radnja (operacija). To je skraćeno zbrajanje jednakih pribrojnika. Multiplikacija se označuje sa $\times$ ili sa $(\cdot)$, a u algebri i bez znaka, tj. $a \times b$, $a \cdot b$, ab. Broj koji se množi zove se *množenik* ili *multiplikand*, a broj kojim se množi *množitelj* ili *multiplikator*. Oba se zovu jednim imenom *činioci* ili *faktori*. Rezultat množenja naziva se *umnožak*, *proizvod* ili *produkt*.

Osnovna svojstva: $ab = ba$ *(zakon komutacije)*; $abc = a(bc) = (ab)c$ *(zakon asocijacije)*; $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$; $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$; $(a + b)c = ac + bc$, ili $(a - b)c = ac - bc$ *(zakon distribucije)*.

Množenje cijelih brojeva. Produkti dvaju jednoznamenkastih brojeva moraju se znati napamet (v. Jedanputjedan). Broj se množi dekadskom jedinicom da mu se pripiše onoliko nula koliko ih ima dekadska jedinica. Ako faktor ima na kraju nula, pomnože se brojevi ispred, a nule se pripišu. *Pismeno množenje.* Npr. $1234 \cdot 267 = 1234\ (200 + 60 + 7) = 1234 \cdot 200 + 1234 \cdot 60 + 1234 \cdot 7 = 246800 + 74040 + 8638 = 329478$.

Kraće: 1234 · 267

```
 2468.
  7404.
   8638
------
329478
```

Decimalni brojevi množe se kao da su oba cijeli brojevi, samo se u dobivenom produktu uzme toliko decimala koliko ih imaju multiplikand i multiplikator zajedno.

Množenje »algebarskih« brojeva. Dva »algebarska« broja množe se tako da se pomnože njihove apsolutne vrijednosti, a produktu daje predznak + ako oba faktora imaju jednake predznake, a predznak — ako faktori imaju različite predznake. Negativnim brojem množi se tako da se multiplikand sa suprotnim predznakom pomnoži apsolutnom vrijednošću multiplikatora.

Množenje razlomaka. Da se uzme dani razlomak od zadanog broja, treba: zadani broj podijeliti nazivnikom; dobiveni rezultat pomnožiti brojnikom danoga razlomka. Prema tome, kad se kaže npr. $\frac{1}{2}$ od 40, onda je to isto što i $40 \cdot \frac{1}{2}$ Shvati li se pak razlomak, kao što i jeste, jednim brojem, onda se naznačeno množenje razlomkom može stvarno smatrati množenjem. Produkt dvaju razlomaka jednak je razlomku kome je brojnik produkt brojnika danih razlomaka, a nazivnik produktu njihovih naziv-

nika. Treba uvijek prije izvršiti skraćivanje, ako je moguće.

Algebarski (opći) razlomci množe se isto tako, tj.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

Množenje općih brojeva.

Monomi se množe tako da se pomnože koeficijenti i naznači množenje glavnih veličina. Ovo pravilo vrijedi i za više faktora. Ako u glavnim veličinama dolaze potencije istih baza, one se množe po pravilu za množenje potencija.

Množenje binoma monomom: $(a + b)c = ac + bc$, analogno je za polinom: $(a + b - c)d = ad + bd - cd$. Množiti polinom sa (-1) isto je što i promijeniti predznak svim članovima polinoma.

Množenje binoma binomom: $(a + b)(x + y) = (a + b)x + (a + b)y = ax + bx + ay + by$, dakle svaki član jednoga binoma sa svakim članom drugoga. Napose: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Analogno se *množi polinom polinomom:* $(a + b + c + \ldots)(m + n + p + \ldots) = am + bm + cm + \ldots + an + bn + cn + \ldots + ap + bp + cp + \ldots$, tj. polinom se množi polinomom tako da se svaki član jednog polinoma pomnoži svakim članom drugoga polinoma, pa se parcijalni produkti zbroje.

MNOŽITELJ, v. Množenje.

MODEL, lik izveden od raznih materijala (kartona, drva, žice i dr.); može biti uzorak ravnog ili

prostornog geometrijskog lika. Upotrebljava se kao pomoćno sredstvo u nastavi matematike.

MONOMI, v. Opći brojevi.

MULTIPLIKACIJA, v. Množenje.

MULTIPLIKAND (MNOŽENIK), v. Množenje.

MULTIPLIKATOR (MNOŽITELJ), v. Množenje.

N

NACRTNA GEOMETRIJA, v. Deskriptivna geometrija.

NAJMANJI ZAJEDNIČKI VIŠEKRATNIK, 1. posebnih brojeva (v. Djeljivost brojeva); 2. algebarskih izraza (v. Opći brojevi).

NAJVEĆA ZAJEDNIČKA MJERA, 1. posebnih brojeva (v. Djeljivost brojeva); 2. algebarskih izraza (v. Opći brojevi).

NAZIVNIK, v. Razlomci.

NEEUKLIDSKE GEOMETRIJE, geometrijski sistemi koji se razlikuju od *Euklidove geometrije (parabolična geometrija)* po tome što u njima *ne važi aksiom o paralelama* (peti Euklidov postulat). 2000 godina matematičari su smatrali da V Euklidov postulat (koji kaže da se jednom tačkom izvan pravca može povući samo jedna paralela tome pravcu) slijedi iz ostalih postulata, tj. da zapravo i nije nužan aksiom geometrije, ali nitko nije uspio to dokazati. Napokon su u prvoj polovini prošlog stoljeća gotovo istovremeno i nezavisno jedan od dru-

goga Lobačevski i Bolyai dokazali da je aksiom o paralelama neovisan o ostalim Euklidovim postulatima, jer se izostavljanjem toga postulata dobivaju geometrijski sistemi, koji su bez unutrašnjih protivurječja, ali su različiti od Euklidove geometrije. Lobačevski je zamijenio V Euklidov postulat aksiomom da u ravnini zadanom tačkom, koja je izvan zadanog pravca, prolaze barem dva pravca koji zadani pravac ne sijeku *(geometrija Lobačevskog — hiperbolična geometrija);* njemački matematičar Riemann je postavio postulat da se jednom tačkom izvan zadanog pravca ne može u ravnini povući nijedna paralela zadanom pravcu. Tako je dobivena *Riemannova geometrija* ili *eliptična geometrija*, koja je različita i od Euklidove geometrije i od geometrije Lobačevskog. Npr. prema Euklidu zbroj (nutarnjih) kutova u trokutu iznosi 180^0, prema Lobačevskom manje, a prema Riemannu više. Neeuklidske geometrije, iako su u prostoru nepristupačne zornom predočivanju, primjenjuju se u teoretskoj fizici, npr. u općoj teoriji relativnosti.

NEGATIVNI BROJEVI, v. »Algebarski« brojevi.

NEILOVA PARABOLA, v. Krivulja.

NEIZMJERNO, v. Beskonačno.

NEJEDNADŽBE, algebarski pojam, naziv za odredbene nejednakosti. Spoj dvaju brojeva (izraza) znakom $>$ (veće od) ili $<$ (manje od) zove se *nejednakost.* Nejednakosti imaju dva važna svojstva: ako je $a < b$, onda je $b > a$; ako je $a > b$, onda je $b < a$; ako je $a < b$ i $b < c$, tada je $a < c$; ako je

$a > b$ i $b > c$, tada je $a > c$. Postoje *identične nejednakosti i odredbene nejednakosti* ili *nejednadžbe.*

Nejednadžba prvog stepena ima oblik: $ax + b > 0$ ili $ax + b < 0$. Pod rješenjem nejednadžbe razumijeva se skup svih onih vrijednosti nepoznanice koje nejednadžbu zadovoljavaju.

Transformacija nejednadžbi u ekvivalentne osniva se na dva teorema: Iz $a > b$ slijedi $a + c > b + c$, gdje je c bilo kakav broj; iz $a > b$ izlazi $ac > bc$, ako je c pozitivno, a $ac < bc$, ako je c negativno.

Nejednadžbe se rješavaju po istim pravilima kao i jednadžbe, vodeći pri tome računa da se nakon množenja ili dijeljenja negativnim brojem znak nejednadžbe promijeni u suprotan.

Nejednadžbe drugog stepena. Opći je oblik: $ax^2 + bx + c > 0$. Uvjeti za koje je nejednadžba moguća:

1) *koeficijent* $a > 0$. Da i trinom $ax^2 + bx + c$ bude pozitivan za svako x, mora biti diskriminanta $D < 0$; ako je pak $D > 0$, onda x mora da bude veće od većeg korijena, ili manje od manjeg korijena jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$; ako je $D = 0$, trinom je pozitivan osim za dvostruki korijen $x_1 = x_2$

2) *koeficijent* $a < 0$. Kako trinom mora biti pozitivan, bit će to moguće samo ako je $D > 0$, a pored toga x poprima vrijednosti između korijena kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$. Ako je $D < 0$, vrijednost trinoma je negativna za sve vrijednosti x od $-\infty$ do $+\infty$. Nejednadžba $ax^2 +$

$+ bx + c > 0$ bit će za $a < 0$ i $b^2 - 4ac \leq 0$ nemoguća.

NEODREĐENE JEDNADŽBE ili **DIOFANTOVE JEDNADŽBE** (Diofant, oko 3. v. n. e.), odredbene jednadžbe kod kojih se traže rješenja samo u cijelim brojevima. Kako jedna linearna jednadžba s dvije nepoznanice ima beskonačno mnogo rješenja, to se postavlja uvjet da nepoznanice moraju biti cijeli brojevi.

Linearna neodređena jednadžba. Neka je $ax + by = c$ reducirana linearna jednadžba s dvije nepoznanice, tj. koeficijenti a i b moraju biti relativno prosti. Za rješavanje takvih jednadžbi postoje dvije metode:

Metoda supstitucije. Jednadžba se razriješi po jednoj nepoznanici, pa se onda za drugu nepoznanicu redom supstituiraju vrijednosti: 0, 1, 2, ..., dok se ne dobije kao rezultat za prvu nepoznanicu cio broj. Tako se u $y = \frac{c - ax}{b}$ stavljaju po redu $x = 0, 1, 2, \ldots$, dok se nađe prvo rješenje u cijelim brojevima, npr. $x = A$ i $y = B$. Onda je opće rješenje: $x = A - bn$, $y = B + an$ (ili $x = A + bn$, $y = B - an$), gdje se pod n razumijeva ma koji cio broj.

Eulerova metoda. Ona je prikladnija od metode supstitucije, naročito kada su koeficijenti a i b veliki brojevi. Postupak se može razabrati iz primjera: $65x + 42y = 109$. Odavde se može pisati:

$$y = \frac{109 - 65x}{45} = 2 - x + \frac{25 - 23x}{42} = 2 - x + u_1,$$

tj. $\frac{25 - 23x}{42} = u_1$ ili odavde $x = \frac{25 - 42u_1}{23} =$

$= 1 - u_1 + \frac{2 - 19u_1}{23} = 1 - u_1 + u_2$, gdje je

$\frac{2 - 19u_1}{23} = u_2$ ili odavde $u_1 = \frac{2 - 23u_2}{19} = - u_2 +$

$+ \frac{2 - 4u_2}{19} = - u_2 + u_3$, tj. $\frac{2 - 4u_2}{19} =$

$= u_3$ ili odavde $u_2 = \frac{2 - 19u_3}{4} = - 5\,u_3 +$

$+ \frac{2 + u_3}{4} = - 5u_3 + u_4$, gdje je stavljeno $\frac{2 + u_3}{4} =$

$= u_4$, a odavde je $u_3 = 4u_4 - 2$. Sada se uzme da je $u_4 = 0$, pa se dobije: $u_3 = - 2$, $u_2 = 10$, $u_1 = - 12$, i konačno $x = 23$, $y = - 33$. Opće rješenje će biti: $x = 23 - 42n$, $y = - 33 + 65n$. Pojedina partikularna rješenja predočena su u ovoj tablici:

za $n =$	0,	1,	2,	3, . . . ,	$-$1, . . .
slijedi:					
$x =$	23,	$-$19,	$-$61,	$-$103, . . . ,	65, . . .
$y =$	$-$33,	32,	97,	162, . . . ,	$-$98, . . .

Napomena: ako je riječ o sistemu od n jednadžbi sa $(n + 1)$ nepoznanica, onda najprije treba eliminacijom doći do jedne jednadžbe s dvije nepoznanice.

Kvadratne neodređene jednadžbe. Kao primjer promotrit ćemo *Pitagorinu jednadžbu,* u kojoj je riječ o trojci (tripletu) prirodnih brojeva, koji kao rješenja zadovoljavaju relaciju: $x^2 + y^2 = z^2$ (v. Pitagorini brojevi).

Iz identiteta: $(u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = (u^2 + v^2)^2$ izlazi opće rješenje: $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $z = u^2 + v^2$, gdje su u i v bilo koji prirodni brojevi ($u > v$). Tako se npr. pojedinačna rješenja dobiju ovako:

za $u = 2, \; 4, \; 3, \; 5, \ldots$
i $v = 1, \; 1, \; 2, \; 2, \ldots$

slijedi:

$x = 3, \; 15, \; 5, \; 21, \ldots$
$y = 4, \; 8, \; 12, \; 20, \ldots$
$z = 5, \; 17, \; 13, \; 29, \ldots$

NEODREĐENI IZRAZI, matematički izrazi kojima vrijednost za određenu vrijednost nije određena. Te neodređene vrijednosti, prema tome kojoj vrijednosti teže pojedine funkcije u datom slučaju, simbolički se označuju sa: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞

Rješavaju se primjenom *L'Hospitalova pravila* u diferencijalnom računu.

NEPARAN BROJ, onaj prirodni broj koji nije djeljiv sa 2. Svaki neparni broj može se napisati u obliku $2n \pm 1$, gdje je $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

NEPEROVE ANALOGIJE, v. Sferna trigonometrija.

NEPOTPUNI BROJEVI, v. Računanje s približnim vrijednostima.

NEPOZNANICA, veličina nepoznate vrijednosti, dolazi u *jednadžbama,* odnosno *nejednadžbama,* a čija se vrijednost određuje rješavanjem jednadžbe odnosno nejednadžbe.

NEPREKIDNO UKAMAĆIVANJE, v. Kamatni račun.

NEPREKIDNOST FUNKCIJE, v. Funkcija.

NESUMJERLJIVE VELIČINE, v. Sumjerljive veličine.

NETO (v. Bruto), neto-iznos: čist iznos; neto-težina: čista težina bez *tare.* Neto-težina = bruto-težina — tara.

NEWTON, Isaac (Njutn, 1642—1727), engleski fizičar, matematičar i astronom, jedna od najznačajnijih ličnosti u historiji nauke. God. 1665. otkriva binomni teorem, a zatim dolazi do osnova *diferencijalnog računa,* koji naziva računom fluksija Obrađujući problem određivanja brzine tijela u bilo kojoj tački putanje, došao je do otkrića diferencijalnog računa. Iz istog su razdoblja i najvažniji radovi iz područja mehanike i njegova istraživanja na području optike. Nešto kasnije je otkrio i obrat ovoga računa — *integralni račun.* Simbolika koju je uveo pokazala se manje praktična od Leibnizove, pa se nije održala. Pored toga dao je formulu za interpretaciju i metodu određivanja korijena algebarske jednadžbe.

NIZ (SLIJED), nizanje ili svrstavanje bilo brojeva bilo predmeta jednih za drugima. Brojevi ili predmeti u nizu zovu se *članovi.* Ako je njihov broj konačan, kaže se da je *niz konačan,* ako je njih beskonačno mnogo, kaže se da je *niz beskonačan.* Općenito se članovi niza obilježavaju sa a_1, a_2, ..., a_n, gdje je a_1 prvi član, a_2 drugi, ..., a_n je n-ti član ili *opći član* niza. Osnovni niz brojeva je *niz prirodnih brojeva:* 1, 2, ..., n, ... do koga se došlo *brojenjem.* Da je taj niz beskonačan naznačeno je tačkicama iza n.

Ako u *funkciji cjelobrojnog argumenta* $y = f(n)$, argument n poprima samo vrijednosti niza prirodnih brojeva, onda se dobije niz ili slijed vrijednosti funkcije: $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$. Tada je svaki član toga niza funkcija svoga rednog broja, tzv. *indeksa.* O *konvergentnim* i *divergentnim* nizovima v. Granična vrijednost. Ako se članovi nekog niza brojeva povežu znakom zbrajanja +, dobije se *red brojeva* (v. Redovi).

Aritmetički niz (progresija) je niz brojeva sa *stalnom razlikom* između ma koga člana i člana pred njim. Ta se razlika obilježava sa d i zove se *razlika* ili *diferencija niza.* Dakle je prema definiciji:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, \ldots, a_1 + (n - 1)\, d$$

Prema tome *formula za opći član* aritmetičkog niza glasi: $a_n = a_1 + (n - 1)\, d$. Ako je d pozitivno, niz raste, ako je d negativno, niz *pada.*

Za *sumu prvih n članova aritmetičkog niza* dobije se formula: $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n - 1)d\right]$. U ove dvije formule za a_n i s_n dolazi pet veličina: a_1, a_n, n, d, s_n, pa se uvijek dvije mogu izračunati ako su poznate ostale tri. Aritmetički niz je dobio taj naziv zbog svojstva da je svaki član, osim prvoga i posljednjeg, aritmetička sredina između dva susjedna člana ili između članova podjednako udaljenih od njega.

Interpolacija aritmetičkog niza. Između dva zadana broja a i b intepolirati aritmetički niz od r brojeva znači odrediti r brojeva koji zajedno sa a i b čine aritmetički niz, u kome je a prvi član, a b posljednji. Ako je d diferencija traženog niza, onda je $d = \frac{b - a}{r + 1}$

Geometrijski niz (progresija) je niz brojeva gdje je *stalan kvocijent* između ma koga člana i člana pred njim. Stalni kvocijent označuje se sa q i zove se *kvocijent geometrijskog niza.* Dakle je prema definiciji: a_1, a_1q, a_1q^2, a_1q^3, . . . , a_1q^{n-1}, pa je formula za *opći član geometrijskog niza* $a_n = a_1q^{n-1}$

Za *sumu prvih n članova geometrijskog niza* glasi formula:

$$s_n = a_1\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{a_nq - a_1}{q - 1}$$

U ove dvije formula dolazi pet veličina: a_1, a_n, n, q i s_n, pa se uvijek dvije mogu izračunati ako su poznate ostale tri.

Geometrijski niz dobio je taj naziv zbog svojstva što je apsolutna vrijednost ma kojeg člana, osim prvoga i posljednjeg, geometrijska sredina između apsolutnih vrijednosti susjednih članova ili između apsolutnih vrijednosti članova koji su jednako udaljeni od njega.

Interpolacija geometrijskog niza. Između dva zadana broja a i b (koji su jednakih predznaka) interpolirati geometrijski niz od r članova znači odrediti r brojeva koji zajedno sa a i b čine geometrijski niz, kome je a prvi član, a b posljednji. Ako je q kvocijent traženog niza, onda je $q = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}$

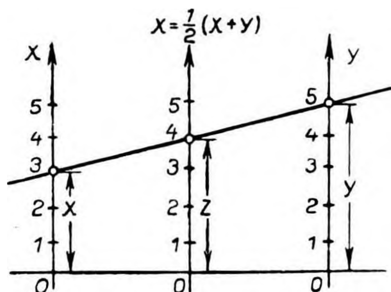
NIZ PRIRODNIH BROJEVA, 1. 2, 3, . . . , nastao je brojenjem. Niz prirodnih brojeva je neograničen. Rezultat brojenja ne zavisi od redoslijeda kojim se predmetima pridružuju brojevi. *Imenovani brojevi* izražavaju koliko je jedinica u pojedinim *skupovima* ili *množinama* i *kakve* su one. *Neimenovani broj* samo kaže *koliko* ima, a ne i kakve su. Broj 1 kao element u skupu naziva se *jedinicom.* Svaki prirodni broj izražava od koliko je jedinica sastavljen.

NOMOGRAFIJA, dio praktične matematike u kojem se mjesto računskih postupaka primjenjuje geometrijsko-grafička metoda. Kako je kod mnogih problema u praksi riječ o relacijama između više promjenljivih veličina, to za njih ne bi bile zgodne tablice (v. Funkcija). Nastala je ideja da se račun zamijeni grafičkim postupkom, tzv. *grafi-*

čkim računom. U užem smislu riječi on se sastoji u tome da se načini crtež za svaki pojedini slučaj koji se promatra, pa se tražene vrijednosti mjere ili očitavaju jednostavno iz slike. Npr. da se nađe vrijednost $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ (v. Pitagorin poučak) za $x = 23$, $y = 27$ nacrta se pravokutan trokut, kome su katete 23 i 27, pa će tada hipotenuza imati vrijednost $z = \sqrt{23^2 + 27^2}$, koja se sada dobije mjerenjem.

Postoji, međutim, općenitija metoda kada se pomoću *numeričkih skala* (v. Funkcijska skala) mogu naći rješenja nekog problema za sve slučajeve koji su obuhvaćeni jednim određenim tipom relacija. Postupak se rješava jednostavnim rukovanjem na načinjenim geometrijsko grafičkim figurama, tzv. *nomogramima*. Nomografija se široko primjenjuje u praksi u svim onim slučajevima kada dolazi do upotrebe jedne te iste relacije, koja se može koristiti za svaki pojedini slučaj. Uopće, gdje god je riječ o brzom nalaženju rezultata (s dovoljnom tačnošću), dolazi do svestrane upotrebe nomografije putem nomograma. Nomogramima pripada po svojoj suštini i *logaritamsko računalo*.

Da se načini nomogram npr. za relaciju $z = \frac{1}{2}(x + y)$, (tom je relacijom predočena srednjica trapeza ili aritmetička sredina), uzet će se tri numerirana pravca (skale) s jednolikom podjelom. Iz sl. 59 razabire se da treba, za uzete vrijednosti

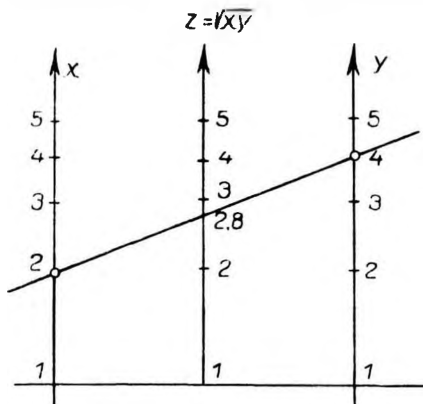


Sl. 59

na skali x i y, tim tačkama povući pravac (koji se ne mora stvarno povući, nego se samo brid ravnala ili napeta nit položi tim tačkama), onda je dobiven trapez, a srednja skala kao srednjica trapeza pokazuje tačku koja odgovara vrijednosti z. (Na slici se za $x = 3$ i $y = 5$ dobije $z = 4$).

Ako npr. treba načiniti nomogram relacije $z = \sqrt{xy}$, onda se logaritmiranjem ove relacije dobije $\log z = \frac{1}{2} (\log x + \log y)$. Vidimo da se dobila prethodna relacija, samo što se ovdje nanose logaritamske skale na nosioce (sl. 60).

Ova dva primjera pokazuju samo princip koji je iskorišćen i u slučajevima kada je riječ o najrazličitijim funkcijskim skalama, pa se nomogrami određenih oblika dobivaju za određene tipove relacija.



Sl. 60

NORMALA, v. Geometrijski elementi; Diferencijalni račun.

NULA, rezultat *oduzimanja* dvaju jednakih brojeva. *Pazi:* nulom se ne dijeli! Igra važnu ulogu u dekadskom sistemu brojeva.

O

OBELISK, v. Prizmatoid.

OBRNUTO RAZMJERNE VELIČINE, v. Omjeri.

OBUJAM (VOLUMEN), veličina onog dijela prostora nekog tijela koji to tijelo zaprema. Broj koji kaže koliko mjernih jedinica sadrži dio prostora što ga neko tijelo zauzima zove se mjerni broj obujma ili volumena toga tijela (v. Sistemi mjera).

Prizma.

Kvadar ili *pravokutni paralelepiped:* $V = abc$ (a, b, c bridovi). Za kocku je $a = b = c$, pa je $V = a^3$

Uspravna i kosa prizma: $V = B \cdot v$ (B baza, v visina).

Kvadratska prizma: $V = a^2 \cdot v$ (a osnovni brid).

Trostrana pravilna prizma: $V = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3} \cdot v$

Pravilna šesterostrana prizma: $V = \frac{3}{2} \cdot a^2 \cdot \sqrt{3} \cdot v$

Valjak.

Uspravan i kos valjak: $V = B \cdot v = r^2\pi \cdot v$ (r radijus baze).

Jednakostraničan valjak ($v = 2r$) :

$$V = r^2\pi \cdot 2r = 2r^3\pi$$

Piramida.

Piramida uopće: $V = \frac{B \cdot v}{3}$

Krnja piramida. Visina dopunjka dobije se pomoću razmjera $B : B_1 = (v + x)^2 : x^2$, odakle je $x = \frac{v(\sqrt{BB_1} + B_1)}{B - B_1}$, gdje su B i B_1 baze, a v visina krnje piramide, pa je $V = \frac{v}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1)$

Stožac.

Uspravan i *kos stožac:* $V = \frac{\pi r^2 \cdot v}{3}$

Jednakostraničan stožac ($v = r\sqrt{3}$) : $V = \frac{r^3 \pi \sqrt{3}}{3}$

Krnji stožac. Visina dopunjka krnjeg stošca $x = \frac{r_1}{r - r_1} \cdot v$, gdje su r i r_1 polumjeri dviju baza, a v je visina krnjeg stošca, pa je

$$V = \frac{\pi v}{3}(r^2 + rr_1 + r^2_1)$$

Kugla.

Kugla: $V = \frac{O \cdot r}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$ (O oplošje, r polumjer kugle).

Kuglin isječak: $V_i = \frac{P_k \cdot v}{3} = \frac{2\pi r^2 \cdot v}{3}$ (P_k površina kalote, v je visina kalote).

Kuglin odsječak: $V_o = \frac{\pi v^2}{3}(3r - v)$, v je visina odsječka. Ako se uzme ϱ za polumjer odsječkove baze, dobije se $\varrho^2 = v(2r - v)$, pa je $V = \frac{\pi v}{6}(3\varrho^2 + v^2)$

Kuglin sloj: $V_s = \frac{\pi \cdot v}{6}(3\varrho_1^2 + 3\varrho_2^2 + v^2)$, v je visina sloja, ϱ_1 i ϱ_2 polumjeri dviju baza sloja.

Posebne formule (R polumjer opisane kugle, r polumjer upisane, v visina, a brid).

Heksaedar (kocka), $\left(R = \frac{a}{2}\sqrt{3}\right.$, to je polovina dijametra, $\left. r = \frac{a}{2}\right)$, $V = a^3$

Tetraedar: $v = \frac{a}{3}\sqrt{6}$, $R = \frac{3}{4}v$, $r = \frac{1}{4}v$,

$$V = \frac{a^3}{12}\sqrt{2}$$

Oktaedar: $R = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, $r = \frac{a}{6}\sqrt{6}$, $V = \frac{a^3}{2}\sqrt{2}$

Dodekaedar: $R = \frac{a}{4}(1 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{3}$,

$r = \frac{a}{20} \cdot \sqrt{10\,(25 + 11\sqrt{5})}$, $V = \frac{a^3}{4}(15 + 7\sqrt{5})$

Ikozaedar: $R = \frac{a}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$,

$r = \frac{a}{12}(3 + \sqrt{5}) \cdot \sqrt{3}$, $V = \frac{5a^3}{12}(3 + \sqrt{5})$

Elipsoid: $V = \frac{4}{3}\,abc\,\pi$, a za *rotacioni elipsoid:* $V = \frac{4}{3}ac^2\pi$, (u slučaju da je $a = b = c = r$ elipsoid prelazi u kuglu).

Bačva: $V \doteq \left(\frac{2R + r}{3}\right)^2 \pi\, v$, ($2R$ promjer na sredini bačve, $2r$ promjer dna, v visina bačve).

Rotaciona tijela (Guldinovo pravilo): $V = 2\pi d \cdot P$, gdje je P površina lika koji vrtnjom izvodi rotaciono tijelo, d je udaljenost težišta toga lika od osi vrtnje, dakle je $2\pi d$ put što ga težište opiše pri jednom okretu. (Os rotacije ne presijeca lik).

ODSJEČAK, v. Segment.

ODUZIMANJE, (ODBIJANJE, SUPTRAKCIJA), druga osnovna računska radnja (operacija) u kojoj se od poznatog zbroja i jednog njegovog pribrojnika traži drugi pribrojnik. Dakle, *inverzna operacija zbrajanja,* tj. $c - b = a$, znači da je $a+b=c$. Broj od koga se oduzima zove se *umanjenik* ili *minuend;* broj koji se oduzima zove se *umanjitelj* ili *suptrahend,* a rezultat oduzimanja *razlika* ili *diferencija.* Znak je (—), čita se *manje* ili *minus.* U $a - b = c$ zove se $a - b$ naznačena diferencija, a c izračunata diferencija ili vrijednost diferencije.

Ako je suptrahend jednak minuendu, diferencija je jednaka nuli. Ako je minuend manji od suptrahenda, dobije se negativan broj (v. »Algebarski« brojevi).

Svojstva: diferencija se ne mijenja ako se minuendu i suptrahendu isti broj pribroji ili oduzme. Od broja se oduzima suma tako da mu se redom oduzmu njeni pribrojnici. Od sume se oduzima suma da se od pojedinih pribrojnika prve sume oduzmu pojedini pribrojnici druge sume i dobivene diferencije zbroje.

Oduzimanje cijelih brojeva: npr. 458 — 213 = = (4 S + 5 D + 8 J) — (2 S + 1 D + 3 J) = = (4 S — 2 S) + (5 D — 1 D) + (8 J — 3 J) = = 2S + 4 D + 5J = 245. — Kraće:

$$\begin{array}{r} 458 \\ -213 \\ \hline 245 \end{array}$$

Oduzimanje decimalnih brojeva obavlja se kao da su cijeli, samo se pazi na decimalni zarez.

Oduzimanje razlomaka. Razlomci jednakih nazivnika oduzimaju se tako da se od brojnika minuenda oduzme brojnik suptrahenda i ta se razlika uzme za brojnik, a u nazivnik se stavi nepromijenjen nazivnik.

Oduzimanje monoma. Istoimeni monomi oduzimaju se tako da se razlika njihovih koeficijenata stavi kao koeficijent zajedničkoj glavnoj veličini.

Oduzimanje polinoma. Od algebarskog izraza oduzima se polinom tako da mu se redom pribroje svi njegovi članovi sa suprotnim predznacima, tj. $m - (a - b + c) = m - (+a) - (-b) - (+c) = m + (-a) + (+b) + (-c) = m - a + b - c$

OKOMIČNI KUTOVI, v. Kut.

OKOMITOST, v. Geometrijski elementi.

OKTAEDAR, v. Poliedar.

OMJERI, odnosi između dva broja.

Pri uspoređivanju dvaju brojeva a i b može se pitati: prvo, *za koliko* je jedan broj veći od drugoga, i drugo, *koliko puta* je jedan broj veći od drugoga. U prvom slučaju se zove *aritmetički omjer,* kod koga je stvarno riječ o naznačenom oduzimanju $a - b$. U drugom slučaju zove se *geometrijski omjer,* gdje je stvarno riječ o naznačenom dijeljenju $a : b$, ili o razlomku $\frac{a}{b}$. U oba se slučaja a zove *prvi član,* dok se b zove *drugi član* omjera. Primjena aritmetičkih omjera nije tako važna, dok je primjena geometrijskih omjera vrlo česta, pa se stoga pod *omjerom* obično i razumijeva samo geometrijski omjer.

Pod *vrijednošću* jednog omjera razumijeva se kvocijent dobiven dijeljenjem prvog člana drugim članom: $a : b = k$ (čita se: a prema b jednako je k). Za dva omjera se kaže da su *jednaki* ako imaju jednake vrijednosti. Vrijednost omjera ne mijenja se ako se oba njegova člana pomnože *(proširivanje omjera)* ili podijele *(skraćivanje omjera)* jednim te istim brojem. Na osnovi toga omjer dvaju razlomaka može se pretvoriti u omjer dvaju cijelih brojeva, a da mu se vrijednost ne promijeni. Kako je

$\frac{a}{b} = k$, to znači koliko se puta poveća a, toliko se

puta poveća i k, ili koliko se puta poveća b, toliko se puta umanji k.

Ako je riječ o promjenljivim veličinama, i to o dvije veličine x i y, koje ovise jedna o drugoj na taj način da koliko se puta *uveća* (umanji) jedna veličina (x), toliko se puta *uveća* (umanji) i druga veličina (y), dakle je omjer vrijednosti tih veličina konstantan, onda se za takve veličine kaže da su *upravno proporcionalne,* te se piše $y : x = k$. Odavde slijedi: $y = kx$, gdje se k zove *faktor proporcionalnosti.* Kaže se da je sa $y = kx$ iskazana upravno proporcionalna zavisnost funkcije y od argumenta x. Faktor proporcionalnosti je, prema tome, vrijednost funkcije y kad argument poprimi vrijednost 1, tj. za $x = 1$ dobije se $y = k$. Naprotiv, ako dvije veličine y i x zavise jedna od druge tako da koliko se puta *uveća* (umanji) jedna veličina (x), toliko se puta *umanji* (uveća) druga veličina (y), tj. ako je vrijednost jedne veličine (y) jednaka omjeru ili

kvocijentu jedne stalne veličine (k) i vrijednosti druge veličine (x), onda se za takve veličine kaže da su *obrnuto proporcionalne.* Tada se piše $y = k/x$ ili $yx = k$; može se reći da su dvije veličine y i x obrnuto proporcionalne ako je produkt njihovih odgovarajućih vrijednosti stalan broj.

Općenito: ako su $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ veličine koje se mogu mijenjati nezavisno jedna od druge, pa ako veličina y zavisi od njih tako da kvocijent od y i produkt $x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ ostaje nepromijenjen, tada se kaže da je y upravno proporcionalno sa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i piše se $y = k \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n$ (k je stalan broj — faktor proporcionalnosti).

Ako je $y = \frac{k}{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$, kaže se da je y obrnuto proporcionalno s veličinama $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Ako je pak $y = k \cdot \frac{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_m}$, gdje je k faktor proporcionalnosti, onda se kaže da je y upravno proporcionalno sa $x_1, \ldots, x_n$, a obrnuto proporcionalno sa $z_1, \ldots, z_m$.

OPĆI BROJEVI, bilo koji posebni brojevi zamijenjeni slovima. Izrazi u kojima dolaze opći brojevi zovu se *algebarski izrazi.* U istom računu isto slovo znači isti broj, a različita slova različite brojeve. Opći brojevi se upotrebljavaju u *formulama* i u izražavanju općih zakona.

Monom ili **jednočlani izraz**, izraz u kome nema članova koji se zbrajaju ili oduzimaju. Posebni broj koji u monomu stoji redovito na prvom mjestu zove

se *koeficijent*, a preostali dio monoma koji je sastavljen od jednog ili više općih brojeva zove se *glavna veličina*. Monomi jednakih glavnih veličina zovu se *istoimeni monomi*. *Supstitucija* je zamjenjivanje općih brojeva posebnim brojevima. Općim brojevima zgodno se izražavaju osnovni zakoni računskih radnji. Npr. $a + b = b + a$ iskazuje *zakon komutacije za zbrajanje*. *Zakon asocijacije pri zbrajanju:* $a + (b + c) = (a + b) + c$. *Zakon komutacije pri množenju:* $ab = ba$ (Oduzimanje i dijeljenje nisu komutativne računske radnje). *Zakon asocijacije pri množenju:* $(ab)\,c = a\,(bc)$. *Zakon distribucije:* $(a \pm b)\,c = ac \pm bc$.

Polinom ili **višečlani izraz** je svaki algebarski zbroj sastavljen od monoma. Pojedini monomi članovi su polinoma. Dvočlani izraz zove se *binom*, tročlani *trinom*. *Reduciranje polinoma* je svođenje izraza od više članova na najjednostavniji oblik, pa često i na sam monom. *Zagrade* pred kojima je znak + mogu se zajedno s tim znakom izostaviti, a ako je pred zagradom znak —, tada se zajedno s tim znakom mogu zagrade izostaviti samo onda ako se svim članovima u zagradama promijene predznaci. Na osnovi toga obavlja se zbrajanje i oduzimanje polinoma: $(a+b-c) - (m-n+p) + (-r+s-t) = a+b-c-m+n-p-r+s-t$. *Višestruke zagrade* izostavljaju se tako da se izostavljaju najprije okrugle, onda uglate, pa na kraju vitičaste. Računske radnje s općim ili algebarskim izrazima, v. Zbrajanje; Oduzimanje; Množenje; Dijeljenje.

OPERACIJA, postupak kojim se rješava neki zadatak. Taj se postupak sastoji od potpune transformacije zadanih kvantiteta, odnosno njihovih simbola, po određenim načelima i pravilima do vrijednosti, odnosno izraza koji odgovara na pitanje postavljeno zadatkom (v. Osnovne računske operacije).

OPLOŠJE, zbroj površina sviju ploha koje omeđuju geometrijsko tijelo.

Opće formule.

Prizma: $O = 2B + P$ (B baza, P površina pobočja).

Uspravna prizma: $O = 2B + P$, gdje je $P = o \cdot s = o \cdot v$ (o opseg baze, s pobočni brid, v visina).

Kosa prizma: $O = 2B + P$, gdje je $P = o \cdot s = (a' + b' + c' + \ldots) \cdot s$, gdje su a', b' c'... stranice normalnog presjeka, o je njegov opseg, s je pobočni brid.

Uspravan valjak: $O = 2\pi r(r + v)$, jer je $P = 2\pi rv$.

Jednakostraničan valjak: $O = 6r^2\pi$, jer je $v = 2r$.

Piramida: $O = B + P$, (P je površina pobočja).

Pravilna n-terostrana piramida: $O = B + P$, gdje je $P = \frac{o}{2} \cdot v_1$, ($o$ je opseg baze, v_1 je visina pobočnog trokuta).

Krnja piramida: $O = B + B_1 + P$. Ako je *pravilna*, onda su pobočke sukladni jednakokračni tra-

pezi s visinom v_1, pa je $O = B + B_1 + (s + s_1) \cdot v_1$, gdje su s i s_1 polovine opsega baza.

Uspravan stožac: $O = B + P$. Ako se plašt razvije u ravninu, dobije se kružni isječak (v. Površine likova). Tada je $O = r\pi(r + s)$, gdje je s duljina stranice.

Jednakostraničan stožac: $(s = 2r)$, pa je $O = 3r^2\pi$

Uspravan krnji stožac: $O = \pi[r^2 + r_1^2 + (r + r_1)s]$, gdje su r i r_1 polumjeri baza, s je stranica.

Kugla: $O = 4r^2\pi = d^2\pi$, (d dijametar).

Kuglina kalota (kapica): $P_k = 2r\pi v = \pi s^2$, (r polumjer kugle, s tetiva od tjemena do ruba kalote).

Kuglina zona (pojas): $P_z = 2r\pi \cdot v$, (v visina zone, tj. udaljenost središta međašnjih kružnica).

Guldinnovo pravilo za oplošja rotacionih tijela: $O = 2\pi d \cdot o$, gdje je o opseg lika koji vrtnjom izvodi rotaciono tijelo, a d je udaljenost težišta tog opsega od osi vrtnje, dakle je $2\pi d$ put što ga ono težište opiše pri jednom okretu (os rotacije ne presijeca lik).

Neke posebne formule.

Kvadar: $O = 2(ab + ac + bc)$; a, b, c bridovi.

Kvadratna prizma: $O = 2a(a + 2v)$, a je osnovni brid, v visina.

Kocka (pravilni heksaedar): $O = 6a^2$

Pravilna trostrana prizma: $O = a\left(\frac{a}{2}\sqrt{3} + 3v\right)$

Pravilna šesterostrana prizma: $O = 3a(a\sqrt{3} + 2v)$

Kvadratna piramida: $O = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot v_1}{2} = a(a + 2v_1)$, gdje je v_1 pobočna visina koja se izračunava iz bridova a i b.

Pravilna trostrana piramida:

$O = \frac{a}{2}\left(\frac{a}{2}\sqrt{3} + 3v_1\right)$, gdje je v_1 pobočna visina.

Pravilna šesterostrana piramida:

$O = 3a\left(\frac{a}{2}\sqrt{3} + v_1\right)$, v_1 je pobočna visina.

Pravilni poliedri:

Tetraedar: $O = a^2\sqrt{3}$

Heksaedar: (v. Kocka)

Oktaedar: $O = 2a^2\sqrt{3}$

Dodekaedar: $O = 3a^2\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$

Ikozaedar: $O = 5a^2\sqrt{3}$

OPSEG, zbroj duljina svih stranica zatvorenog ravnog geometrijskog lika. Obilježava se sa o. Tako je opseg: raznostraničnog trokuta: $o = a + b + c$; jednakokračnog trokuta: $o = a + 2k$, (k krak); jednakostraničnog trokuta: $o = 3a$; pravokutnika, romba i deltoida: $o = 2(a + b)$; kvadrata i romba: $o = 4a$; jednakokračnog trapeza: $o = a + c + 2k$; raz-

nostraničnog četverokuta: $o = a + b + c + d$; poligona: $o = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$; pravilnog poligona: $o = n \cdot s_n$, (s_n stranica); kruga: $o = 2 r \pi = d \pi$; duljina luka kružnice: $l = \frac{r \pi}{180^0} \cdot \alpha$

Posebne formule za stranice (r polumjer kružnice): upisanog jednakostraničnog trokuta: $s_3 = r \sqrt{3}$; opisanog jednakostraničnog trokuta: $S_3 = 2 r \sqrt{3}$; upisanog kvadrata: $s_4 = r \sqrt{2}$; opisanog kvadrata: $S_4 = 2 r$; upisanog pravilnog peterokuta: $s_5 = \frac{r}{2} \cdot \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$; upisanog pravilnog šesterokuta: $s_6 = r$; upisanog pravilnog deseterokuta: $s_{10} = \frac{r}{2} \cdot (\sqrt{5} - 1)$; upisanog pravilnog dvanaesterokuta: $s_{12} = r \sqrt{2 - \sqrt{3}}$

ORDINATA, v. Koordinatni sistem.

ORTOCENTAR, v. Trokut.

ORTOGONALNA PROJEKCIJA, v. Projekcije.

OSMICA, naziv ili za broj 8 ili za brojku 8, koja se upotrebljava pri numeriranju predmeta.

OSNA SIMETRIJA, v. Simetrija.

OSNOVNA VRIJEDNOST, v. Procentni račun.

OSNOVNE RAČUNSKE OPERACIJE, *zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje.* Više računske operacije: potenciranje, korjenovanje i logaritmiranje.

P

PANTOGRAF, sprava pomoću koje se može mehanički uvećati ili umanjiti zadana slika, crtež ili plan. Pantograf se osniva na *perspektivnoj sličnosti* (v. Sličnost).

PAR, dva, dvije, dvoje; po dvoje.

PARABOLA, skup svih tačaka u ravnini kojima je udaljenost od zadanog pravca *(ravnalica* ili *direktrisa)* jednaka udaljenosti od zadane tačke F *(žarište* ili *fokus)*. Udaljenost svake tačke parabole od žarišta zove se *radijus-vektor*. Tetiva kroz žarišta normalna na apscisnoj osi zove se *parametar* ($2p$) parabole. Okomica spuštena iz žarišta na ravnalicu jednaka je polovini parametra (p), pa je fokus udaljen od ishodišta za $\frac{p}{2}$.Pravac povučen žarištem okomito na ravnalicu zove se *os parabole*, a njeno sjecište s parabolom zove se *vrh* ili *tjeme parabole*. Iz definicije izlazi *jednadžba parabole*: $y^2 = 2px$. To je *vršna* jednadžba parabole.

Napomena: vršna je jednadžba elipse $y^2 = 2\,px - \frac{p}{a}\,x^2$, *hiperbole* $y^2 = 2\,px + \frac{p}{a}\,x^2$. One su oblika: $y^2 = 2\,px + mx^2$. Za $m = 0$ dobiva se parabola, za $m < 0$ elipsa, za $m > 0$ hiperbola, a za $m = -1$ dobiva se vršna jednadžba kružnice. Tako je i došlo do naziva: parabola, elipsa i hiperbola (v. Presjeci stošca).

Radijus-vektor je linearna funkcija apscise, jer je $r = \frac{p}{2} + x$. *Konstrukcija parabole,* v. Geometrijske konstrukcije. *Uvjetna jednadžba* da pravac $y = mx + n$ bude tangenta na parabolu $y^2 = 2\,px$ glasi: $p = 2\,mn$. *Jednadžba tangente* u tački parabole glasi: $y_1 y = p\,(x + x_1)$. *Polara,* pravac koji spaja dirališta obiju tangenata povučenih iz tačke T izvan parabole. Kaže se: to je polara tačke T s obzirom na parabolu. Tačka T zove se *pol* te polare. Jednadžba polare: $y_1 y = p\,(x + x_1)$.

PARABOLIČKA GEOMETRIJA, v. Neeuklidske geometrije.

PARABOLOIDI, plohe 2. stepena bez središta, a s jednom osi simetrije (eliptični paraboloid i hiperbolični paraboloid), v. Analitička geometrija.

PARALELE, pravci u ravnini koji se ne sijeku. Dvije ravnine koje nemaju zajedničkih tačaka paralelne su ravnine. Pravac i ravnina koji nemaju zajedničkih tačaka paralelni su (v. Geometrijski elementi).

PARALELEPIPED, prizma omeđena sa 6 paralelograma, dva po dva su sukladna i leže u paralel-

nim ravninama. Prema tome su i baze paralelogrami. Kako su i pobočke paralelogrami, to se svaka ploha može uzeti za bazu. Paralelepiped kome su sve strane pravokutnici zove se *pravokutni paralelepiped* ili *kvadar*. Duljine triju bridova, koji izlaze iz jednog vrha kvadra, određuju *dimenzije* tog tijela i zovu se *duljina, širina* i *visina*. Kvadar koji ima dvije dimenzije jednake, a treću dimenziju manju ili veću, zove se *kvadratska* (ili kvadratna) *prizma*. Kvadar koji ima sve tri dimenzije jednake zove se *kocka* (v. Poliedar). Sve prostorne dijagonale paralelepipeda prolaze jednom te istom tačkom, i ta ih tačka raspolavlja. Paralelepiped je centralno simetričan lik, centar njegove simetrije je tačka u kojoj se sijeku njegove dijagonale.

Oplošje i volumen Paralelepipeda, v. Oplošje; Obujam.

PARALELOGRAM, četverokut kojemu su po dvije suprotne stranice paralelne. Udaljenost njegovih usporednih stranica određuje *visinu.* Svaka se stranica može uzeti za *osnovicu* ili *bazu.* U paralelogramu suprotni su kutovi jednaki, a kutovi uz svaku stranicu suplementni. Vrijedi i obrat. U paralelogramu su stranice koje leže jedna nasuprot drugoj međusobno jednake. Vrijedi i obrat. U paralelogramu dijagonale se raspolavljaju. Dijagonala dijeli paralelogram na dva sukladna trokuta. Svaki je paralelogram centralno simetričan četverokut s obzirom na sjecište dijagonala kao centar simetrije. Vrijedi i obrat.

Površina paralelograma, v. Površine likova.

PARALELOGRAM VEKTORA, geometrijski način sumiranja vektora.

PARAMETAR, označava neku konstantnu veličinu ili veličinu neodređene vrijednosti koja dolazi u općoj jednadžbi nekog skupa krivulja. Ako se parametru dade određena vrijednost, onda se iz skupa krivulja, definiranih tom jednadžbom, izdvaja potpuno određena krivulja. U analitičkoj geometriji kod krivulja drugog stepena parametrom se zove tetiva koja prolazi žarištem, a okomita je na glavnoj osi.

PASCAL, Blaise (Paskal, 1623—1662), francuski filozof, matematičar i fizičar. Već u svojoj šesnaestoj godini napisao je djelo o *konikama.* God. 1640. konstruirao je stroj za zbrajanje. Postavio je *teoriju vjerojatnosti.* Našao je pravilo djeljivosti nekog broja bilo kojim drugim brojem. Sastavio je tzv. *Pascalov trokut* (v. Binomni poučak) kojim se dobivaju binomni koeficijenti. U fizici je istražujući plinove i tekućine postavio tzv. *Pascalov zakon.*

PENTAGON (PETEROKUT), v. Mnogokut.

PENTAGONSKI DODEKAEDAR, v. Poliedar.

PERIFERIJA, v. Krug; Kružnica.

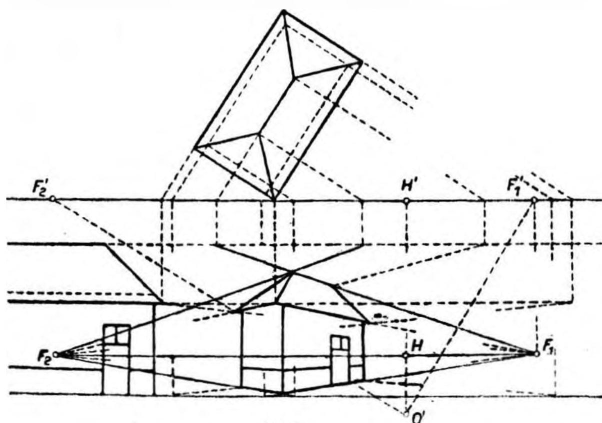
PERIFERIJSKI KUT, v. Krug; Kružnica.

PERIODSKE FUNKCIJE, funkcije koje ne mijenjaju svoju vrijednost ako im se argumentu doda neki broj ili cjelobrojni višekratnik toga broja (nazvan *period*). Tako su npr. funkcije sinus i kosinus

periodske funkcije, jer je za svaki x, *sin* $(x + 2k\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, (k cio broj). Prema tome je $2k\pi$ period tih funkcija. Najmanja pozitivna vrijednost 2π zove se *osnovni period*. Funkcije tangens i kotangens imaju osnovni period π, jer je $\mathrm{tg}(x + k\pi) = \mathrm{tg}\, x$ i $\mathrm{ctg}(x + k\pi) = \mathrm{ctg}\, x$.

PERMUTACIJE, v. Kombinatorika.

PERSPEKTIVA, dio deskriptivne geometrije u kojem se slike različitih predmeta prikazuju tako kako se oni vide iz jedne zadane tačke ili s jednog određenog mjesta. Konstruktivni postupak za dobivanje perspektivnih slika u stvari je projiciranje na ravninu slike iz središta centralnog projiciranja *(očišta)* pojedinih tačaka zadanog predmeta. *Cen-*



Sl. 61

tralnom projekcijom ili *perspektivnom slikom* neke tačke u prostoru smatra se probodište ravnine slike sa spojnicom te tačke i očišta. Fotografski snimljena slika nije ništa drugo nego mehaničko-optičkim putem dobivena perspektivna slika. Na sl. 61. prikazano je kako se iz tlocrta i nacrta dobije perspektivna slika.

PERSPEKTIVNA SLIČNOST, v. Sličnost.

PERSPEKTIVNI POLOŽAJ, v. Projekcije.

PETEROKUT (PENTAGON), v. Mnogokut.

PETICA, naziv ili za broj 5 ili za brojku 5 kojom je numeriran neki predmet. Može značiti i neki pojam, npr. ocjena petica znači isto što i odličan.

PI (π), slovo grčkog alfabeta, v. Ludolfov broj.

PIRAMIDA, tijelo kome je jedna strana bilo kakav poligon *(baza)*, a ostale strane trokuti *(pobočke, bočne strane)* sa zajedničkim vrhom koji je ujedno i *vrh piramide*. Broj bočnih strana jednak je broju stranica baze. Iz svakog ugla na bazi izlaze tri brida, dok iz vrha piramide izlazi toliko bridova koliko osnovka ima stranica. Bridovi na bazi zovu se *osnovni bridovi*. Bridovi koji se sastaju u vrhu zovu se *pobočni bridovi* piramide. Ako baza ima n stranica, piramida je n-terostrana ($n = 3, 4, 5, \ldots$). Udaljenost vrha piramide od njene baze zove se *visina*, mjeri se na okomici spuštenoj iz vrha na bazu. Ako su pobočni bridovi jednaki, onda se piramida zove *uspravna*, inače je *kosa*. Oko baze uspravne piramide može se opisati kružnica oko središta koje je nožište visine. Uspravna piramida ko-

joj je baza pravilan poligon zove se *pravilna piramida*. Sve pobočke pravilne piramide sukladni su jednakokračni trokuti.

Presjek piramide ravninom koja prolazi kroz dva pobočna brida sadrži jednu dijagonalu baze, pa se zato zove *dijagonalni presjek. Glavni dijagonalni presjek* sadrži najveću dijagonalu baze.

Oplošje i obujam piramide, v. Oplošje; Obujam.

Krnja piramida je dio piramide koji se nalazi između baze i njoj usporednog presjeka. Preostali dio zove se *dopunjak krnje piramide*. Krnja piramida je omeđena s dvije *baze* (slični poligoni) i *pobočkama* (trapezima). Svi ovi trapezi zajedno čine *pobočje*. Bridovi na bazi su *osnovni bridovi*, a oni u kojima se sijeku po dvije pobočke *pobočni bridovi*. Udaljenost između baza zove se *visina krnje piramide*. Krnja piramida je *pravilna* ako su joj baze pravilni poligoni, a pobočke sukladni jednakokračni trapezi.

Oplošje i obujam krnje piramide, v. Oplošje; Obujam.

PITAGORA (oko 580—510. pr. n. e.), grčki filozof i matematičar. Napustivši otok Samos nastanio se u grčkom Krotonu u juž. Italiji, gdje je osnovao svoju školu. Harmoniju kozmosa sveo je na matematičke pojmove. S Pitagorom započinje matematika kao nauka. Njemu se pripisuje pronalazak tzv. *Pitagorina poučka*.

PITAGORIN POUČAK, metrička relacija među stranicama svakog pravokutnog trokuta: u svakom pravokutnom trokutu kvadrat mjernog broja hipo-

tenuze jednak je zbroju kvadrata mjernih brojeva kateta, ili u algebarskom obliku: $c^2 = a^2 + b^2$, odavde se dobije $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $a = \sqrt{c^2 - b^2}$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$. Ovaj poučak mnogo se primjenjuje, a izlazi kao poseban slučaj iz *kosinusova poučka* koji vrijedi za bilo kakav trokut. Poseban slučaj bio je poznat *harpedonaptima* (3, 4, 5), i u Indiji (pravokutan trokut sa stranicama 5, 12 i 13).

PITAGORINI BROJEVI, cjelobrojne trojke mjernih brojeva stranica pravokutnog trokuta. Ako se sa x i y označe katete, a sa z hipotenuza, i ako je $x = m^2 - n^2$, $y = 2\,mn$, $z = m^2 + n^2$, gdje su m i n prirodni brojevi po volji, $m > n$, tada su brojevi x, y i z cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^2 + y^2 = z^2$. Na taj način određene su sve trojke Pitagorinih brojeva. Tako su npr. za $m = 2$, $n = 1$ određeni brojevi $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$; za $m = 3$, $n = 2$ određeni su brojevi $x = 5$, $y = 12$, $z = 13$, itd.

PLANIMETAR, sprava za mjerenje površine lika u ravnini. Tačnost mjerenja dobivena planimetrom kreće se oko tisućine mjerene površine. Postoji čitav niz planimetara različite namjene i izrade.

PLANIMETRIJA, v. Geometrija.

PLOHE, međe geometrijskih tijela. Ploha nastaje neprekidnim gibanjem krivulje u prostoru. Najjednostavnija ploha je *ravna ploha;* sve ostale su *zakrivljene* (oble) *plohe.* Ravna ploha neomeđena sa svih strana zove se ravnina. Razlikuje se od svake zakrivljene plohe po tome što se u ravnini mogu položiti pravci u svim smjerovima.

U analitici ravnina je algebarski određena linearnom jednadžbom; sve ostale plohe određene su algebarskim jednadžbama višeg stepena ili transscendentnim jednadžbama. Zato se plohe dijele na *algebarske* i *transcendentne plohe.* Ploha na kojoj svakom tačkom prolazi barem jedan pravac (izvodnica), koji u njoj potpuno leži, zove se *pravčasta ploha.* Najpoznatije pravčaste plohe, koje se dadu razviti u ravninu, tzv. *razvojne plohe,* jesu npr. valjkasta i stožasta ploha.

Prizmatična ploha. Ako se pravac *p*, koji probada ravninu zadanog poligona, giba kližući po obodu toga poligona (od *n* stranica), a da pri tome ostaje neprekidno usporedan s početnim položajem, dobiva se *prizmatična ploha,* koja omeđuje dio prostora, tzv. *prizmatičan prostor.* Dijelovi ravnina koji omeđuju taj prostor zovu se *strane.* Ima ih *n.* Paralelni pravci uzduž kojih se sastaju po dvije strane prizmatične plohe zovu se *bridovi.* Ima ih *n.* Ako se prizmatična ploha presiječe s dvije paralelne ravnine, dobivaju se za presjek sukladni poligoni.

Cilindrična ploha. Ako se pravac *p* giba tako da stalno siječe samo u jednoj tački zadanu kružnicu *k*, a pri tome ostaje neprestano usporedan sa svojim početnim položajem, opisuje taj pravac oblu plohu, koja se zove *valjkasta* ili *cilindrična ploha* (kružna). Svaki od pravaca zove se *izvodnica (generatrisa)* valjkaste plohe, a kružnica *k* zove se *provodna krivulja (direktrisa).* Ova valjkasta ploha može nastati i tako da se kružnica *k* giba *translatorno* u prostoru. Presiječe li se valjkasta ploha

ravninom paralelno s ravninom kružnice *k*, dobiveni presjek bit će opet kružnica.

Prostorni ugao. Ako zraka izlazi iz jedne tačke *V* i giba se tako da stalno siječe poligon samo u jednoj tački, opisat će ta zraka *prostorni ugao* s toliko strana koliko zadani poligon ima stranica.

Konusna ploha. Ako se pravac giba u prostoru tako da stalno prolazi istom tačkom (*V*) i siječe zadanu kružnicu (*k*) samo u jednoj tački, onda taj pravac opisuje oblu plohu, koja se zove *stožasta* ili *konusna ploha.* Pravci koji prolaze tačkom *V* i sijeku kružnicu *k* zovu se *izvodnice (generatrise),* a zadana kružnica *k* je *direktrisa.* Kako je direktrisa kružnica, zove se takva stožasta ploha i *kružna stožasta ploha.* Tačka *V* kojom prolaze sve izvodnice zove se *vrh* stožaste plohe. Ako se stožasta ploha presiječe ravninom koja ne prolazi vrhom, onda stožasta ploha s tom ravninom omeđuje dio prostora ili tijelo koje se zove *stožac* (kružni). Skup svih izvodnica stošca čini njegov *plašt.* O vrstama presjeka v. Presjeci stošca.

Kuglina ploha, ploha koja omeđuje *kuglu.* Kuglina ploha nastaje tako da polukružnica rotira oko svog promjera. Svaki presjek kugline plohe ravninom jeste kružnica. Ako ravnina prolazi središtem kugline plohe, presječna kružnica zove se *glavna kružnica.*

Rotacione plohe, v. Rotacija.

Kvadrike, v. Analitička geometrija.

PLUS (+), v. Zbrajanje; »Algebarski« brojevi.

PODRUČJA BROJEVA, skupovi svih brojeva dobivenih određenom računskom operacijom. Inverzne operacije oduzimanje i dijeljenje proširuju područje prirodnih brojeva uvođenjem nule te negatvinih i razlomljenih brojeva (razlomaka). Takvo područje brojeva najšire je područje do kojeg mogu dovesti četiri osnovne računske operacije, a zove se *područje racionalnih brojeva.* Ako se bilo koja od ovih operacija provede na racionalnim brojevima, kao rezultat će se dobiti opet racionalan broj. Radiciranje kao inverzna operacija višeg stepena dovodi opet do proširenja brojevnog područja, do *područja iracionalnih brojeva.* To su brojevi oblika beskonačnih neperiodskih decimalnih brojeva. Racionalni i iracionalni brojevi zovu se zajedničkim imenom *realni brojevi.* Oni se dadu grafički jednoznačno predočiti na realnom brojevnom pravcu tačkom. I obrnuto: svakoj tački brojevnog pravca uvijek odgovara samo jedan realan broj. Naprotiv, kvadratni korijeni iz negativnih brojeva dovode do novih brojeva koji nisu realni, pa se za razliku od ovih zovu *imaginarni brojevi.* Još se šire područje dobije ako je riječ o spoju realnih i imaginarnih brojeva. Tako algebarsko zbrajanje dovodi do brojeva oblika $a + bi$. Ovi brojevi zovu se *kompleksni brojevi* (v. Imaginarni i kompleksni brojevi).

Sve racionalne operacije (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje i potenciranje cijelim eksponentom) i iracionalne (potenciranje razlomljenim eksponentom, tj. radiciranje), zovu se zajedničkim imenom *algebarske operacije.* Dok su sve racionalne

operacije (izuzev dijeljenje s nulom) jednoznačne, dotle je iracionalna operacija radiciranje višeznačna.

Napomena: algebarske operacije dovode do *algebarskih brojeva,* koji su korijeni algebarskih jednadžbi u obliku polinoma s cijelim koeficijentima. Naprotiv, brojevi koji nisu rješenja nijedne algebarske jednadžbe s cijelim koeficijentima, zovu se *transcendentni brojevi* (npr. broj π i e).

POGREŠKE, v. Računanje s približnim vrijednostima.

POKUS (KONTROLA, DISKUSIJA), provjeravanje dobivenog rezultata npr. pri računskim operacijama. Npr. ispitati da li nađena vrijednost zadovoljava ponajprije sastavljenu jednadžbu, a zatim još ispitati ili raspraviti da li nađeno rješenje odgovara uvjetima zadatka.

POLIEDAR, geometrijsko tijelo omeđeno samo dijelovima ravnina. Poligoni koji ga omeđuju jesu njegove *strane.* Stranice tih poligona u kojima se sijeku po dvije strane zovu se *bridovi.* Tačke na poliedru u kojima se sastaju tri i više bridova zovu se *vrhovi* ili *ugaone tačke.* Spojnica dvaju vrhova, koja ne leži ni u jednoj od strana poliedra, zove se *dijagonala poliedra.* Dijagonale koje leže u stranama zovu se *plošne dijagonale.* Dijelovi ravnina koji se sastaju u jednom vrhu poliedra određuju pripadni *n-terobrid* ili *prostorni ugao.*

Poliedri omeđeni sukladnim pravilnim poligonima i u kojima se u svakoj ugaonoj tački sastaje jednaki broj bridova zovu se *pravilni poliedri* (pra-

vilna geometrijska tijela). Ako je v broj svih vrhova, b broj svih bridova, p broj svih strana pravilnog poliedra, n broj stranica svake strane, m broj strana koje se sastaju u vrhu pravilnog poliedra, ili broj bridova koji izlaze iz jednoga vrha, onda postoje relacije: $p = \frac{4m}{2(m+n) - mn}$, $v = \frac{np}{m} = \frac{4n}{2(m+n) - mn}$, $b = \frac{np}{2} = \frac{2mn}{2(m+n) - mn}$, pa važi *Eulerova formula:* $v - b + p = 2$

Može se pokazati da ima samo pet pravilnih poliedara: *pravilni tetraedar*, kome se mreža sastoji od četiri sukladna jednakostranična trokuta; *pravilni oktaedar*, mreža se sastoji od osam sukladnih jednakostraničnih trokuta; *pravilni ikozaedar*, mreža se sastoji od 20 sukladnih jednakostraničnih trokuta; *pravilni heksaedar* ili *kocka*, mreža se sastoji od 6 sukladnih kvadrata; *pravilni pentagonski dodekaedar*, mreža se sastoji od 12 sukladnih pravilnih peterokuta.

Ako se sa k označi broj bridnih kutova, a sa d broj svih dijagonala, onda se za pravilne poliedre dobije pregledna tablica:

Prav. poliedar	n	m	k	p	v	b	d
tetraedar	3	3	12	4	4	6	—
heksaedar	4	3	24	6	8	12	4
oktaedar	3	4	24	8	6	12	3
dodekaedar	5	3	60	12	20	30	100
ikozaedar	3	5	60	20	12	30	36

Svaki pravilni poliedar ima središte oko kojeg se može opisati kuglina ploha kroz sve ugaone tačke i upisati kuglina ploha koja dira sve plohe poliedra.

Oplošje i volumen pravilnih poliedara, v. Oplošje; Obujam.

POLIGON, v. Mnogokut.

POLINOM, v. Opći brojevi.

POLUKRUG (POLUKRUŽNICA), v. Krug; Kružnica.

POSTOTAK, v. Procentni račun.

POSTULAT, postavka koja ne proizlazi iz nekih drugih poučaka. Znači isto što i *aksiom*. Euklidova podjela osnovnih postavki na postulate i aksiome nema logičke opravdanosti.

POTENCIJA, u matematici općenito naziv za matematički izraz koji nastaje kada se jedna veličina množi sama sobom (v. Potenciranje). U geometriji *potencija tačke* na kružnicu je produkt odsječaka što ih odsijeca kružnica na sekanti (v. Kružnica).

POTENCIRANJE, računska operacija trećeg stepena koja se sastoji od uzastopnog množenja jednog te istog broja (a). Tako nastali produkt zove se *potencija*, npr. a^n je n-ta potencija broja a; n je *eksponent* potencije i kaže koliko je puta broj a uzet kao faktor; a je *baza* potencije. Za drugu i treću potenciju postoje posebni nazivi: *kvadrat* i *kub*. Napose je $a^1 = a$. Nadalje je za $n > 1 : a^n > a$, ako je $a > 1$, te $a^n < a$, ako je $0 < a < 1$

Osnovna pravila: $ma^r \pm na^r = (m \pm n)a^r$; $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$; $a^r : a^s = a^{r-s}$; $a^n \cdot b^n = (ab)^n$; $a^n : b^n = (a:b)^n$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $(a^n)^m = a^{mn}$;

$(a^m)^n = (a^n)^m$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{a^r}$; $a^0 = 1$;

$(+a)^{2n} = a^{2n}$; $(-a)^{2n} = a^{2n}$; $(+a)^{2n-1} = a^{2n-1}$; $(-a)^{2n-1} = -a^{2n-1}$

Pri potenciranju postoje dvije inverzne operacije: *korjenovanje i logaritmiranje.*

Kvadriranje polinoma i posebnih brojeva: $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc)$; $(a \cdot 10 + b)^2 = a^2 \cdot 10^2 + 2ab \cdot 10 + b^2$

Kvadriranje prirodnih brojeva. $35^2 = (30 + 5)^2$ dakle

35^2	
30^2	900
$2 \cdot 30 \cdot 5$	600
5^2	25
	1225

ili ispuštajući nule

35^2	
3^2	9 . .
$2 \cdot 3 \cdot 5$	30 .
5^2	25
	1225

Kako je $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + (2a + b)b$, još kraće se radi ovako:

$$\begin{array}{lr} \overline{35^2} & \\ 3^2 \ldots\ldots & 9\ldots \\ 65 \cdot 5 \ldots\ldots & \underline{325} \\ & 1225 \end{array}$$

Analogno se kvadriraju i višeznamenkasti brojevi.

Decimalni brojevi kvadriraju se kao da su cijeli, samo se u rezultatu decimalnim zarezom odvoji dvaput više decimalnih mjesta.

Kubiranje: $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$; $(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$; $(a \cdot 10 + b)^3 = a^3 \cdot 10^3 + 3a^2b \cdot 10^2 + 3ab^2 \cdot 10 + b^3$. Ova posljednja formula pokazuje postupak kako se kubiraju dekadski brojevi. Za decimalne brojeve analogno kvadriranju.

POTPUNA INDUKCIJA, v. Indukcija.

POUČAK, iskazuje neke matematičke činjenice ili se njime izriču rezultati istraživanja bilo geometrijskih bilo aritmetičkih. Poučci se dijele na *osnovne* i na *izvedene.* Svaki *izvedeni poučak (teorem)* treba u matematici uvijek dokazati na temelju ranije izvedenih poučaka kojima je ispravnost bila dokazana. Taj proces mora započeti poučcima koji se ne dokazuju, tj. oni se usvajaju bez dokaza, jer za njihovo dokazivanje nema mogućnosti, ili su očigledni. Zovu se *osnovni poučci* ili *aksiomi.*

Svaki teorem se u stvari sastoji od dva dijela: prvi je dio *pretpostavka* (hipoteza), drugi je *tvrdnja* (teza). U pretpostavci se navode uvjeti pod kojima ima da vrijedi zaključak koji je izrečen tvrd-

njom i koji valja *dokazati*. Dokaz može biti *direktan* ili *indirektan* (v. Dokaz). Kaže se da je jedan teorem *obrat* drugoga kad on ima njegovu tvrdnju za pretpostavku, a pretpostavku za tvrdnju, Obrat teorema ne mora uvijek biti istinit, već treba uvijek dokazati njegovu istinitost.

POVRŠINE LIKOVA (KVADRATURA, PLOŠTINA), veličina dijela ravnine što ga zauzima geometrijski lik. Izračunavanje mjernog broja površine zove se kvadratura toga lika (P).

Formule za površinu (ploštinu) **ravnocrtno omeđenih likova.**

Pravokutnik: $P = ab$, gdje su a i b baza i visina, odnosno duljina i širina. Ako je $a = b$, to je za *kvadrat:* $P = a^2$.

Paralelogram: $P = av$ (a baza, v visina).

Trokut: $P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$

(v_a visina na stranicu a, itd.).

Trapez: $P = \frac{a + c}{2} \cdot v = s \cdot v$ (a i c paralelne stranice, v visina, srednjica $s = \frac{a + c}{2}$

Mnogokut (poligon). Površina ma kakvog poligona nađe se ili tako da se mnogokut razdijeli u trokute, obično dijagonalama koje izlaze iz jednog vrha, ili *metodom koordinata* (povuče se najdulja

dijagonala, pa se iz ostalih vrhova povuku okomice na tu dijagonalu, tada se dobiju trokuti i trapezi).

Pravilan mnogokut: $P = \frac{o \cdot \varrho}{2} = \frac{n \cdot s_n \cdot \varrho}{2}$, gdje je o opseg, ϱ polumjer upisane kružnice, n broj stranica, s_n je stranica.

Posebne formule.

Pravokutan trokut: $P = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{c \cdot v}{2}$, ($a$ i b jesu katete, c hipotenuza, v visina na hipotenuzu).

Jednakokračan trokut. Kako je $v = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$, to je $P = \frac{a}{2}\sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$; ($a$ baza, b krak, v visina).

Jednakostraničan trokut. Kako je $v = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$, to je $P = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$. Dalje je $r = \frac{2}{3} v = \frac{a}{3} \sqrt{3}$, $\varrho = \frac{1}{3} v = \frac{a}{6} \cdot \sqrt{3}$ (a stranica, v visina, r polumjer opisane, ϱ polumjer upisane kružnice).

Trokut, ako su zadane stranice, $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$; to je *Heronova formula.* Dalje je $r = \frac{abc}{4P}$, $\varrho = \frac{P}{s}$ (s poluzbroj stranica).

Kvadrat: $P = a^2$, $r = \frac{a}{2}\sqrt{2}$, $\varrho = \frac{a}{2}$

Romb: $P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ (d_1 i d_2 dijagonale romba).

Pravilan peterokut. $P = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$ (a stranica).

Pravilan šesterokut. Kako je $r = a$, to je $P = \frac{3a^2}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3r^2}{2} \cdot \sqrt{3}$

Pravilan osmerokut. Kako je $r = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$, to je $P = 2a^2 (1 + \sqrt{2}) = 2r^2 \cdot \sqrt{2}$

Pravilan deseterokut. Kako je $r = \frac{a}{2}(\sqrt{5} + 1)$,

to je $P = \frac{5a^2}{2} \cdot \sqrt{5 + 2 \cdot \sqrt{5}} = \frac{5r^2}{4} \cdot \sqrt{10 - 2 \cdot \sqrt{5}}$

Pravilan dvanaesterokut. Kako je $r = a \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}$, to je $P = 3a^2 (2 + \sqrt{3}) = 3r^2$

Površina kruga i njegovih dijelova.

Krug: $P = \pi r^2$

Kružni isječak: $P_i = \frac{l \cdot r}{2} = \frac{\pi r^2 \alpha}{360^0} = \frac{r^2 \cdot arc\, \alpha}{2}$

(r polumjer kruga, l je luk, α je središnji kut u stupnjevima, $arc\, \alpha$ je središnji kut u radijanima).

Kružni odsječak: $P_o = P_i - P_t$, tj. površina kružnog odsječka jednaka je površini pripadnog isječka umanjenog za površinu pripadnog trokuta.

Kružni vijenac: $P_v = \pi (R^2 - r^2) = \pi (R + r) (R - r)$, gdje je R polumjer vanjske, a r polumjer unutarnje kružnice.

Isječak kružnog vijenca: $P_{iv} = \frac{L + l}{2} \cdot s = \frac{L + l}{2} (R - r) = \frac{R^2 \pi \alpha}{360^0} - \frac{r^2 \pi \alpha}{360^0} = \frac{\pi \alpha}{360^0} \cdot (R^2 - r^2)$, gdje je L luk vanjske, l luk unutrašnje kružnice, s širina vijenca, R je polumjer vanjske, r polumjer unutrašnje kružnice, α središnji kut.

Površina elipse: $P = ab\pi$, (a velika, b mala poluos).

POVRŠINA TIJELA, v. Oplošje.

POZITIVNI BROJEVI, v. »Algebarski« brojevi.

PRAMEN PRAVACA, skup svih pravaca u ravnini koji prolaze jednom te istom tačkom *(vrh pramena),* v. Geometrijski elementi.

PRAMEN RAVNINA, skup svih ravnina u prostoru koje prolaze jednim te istim pravcem *(os pramena),* v. Geometrijski elementi).

PRAVAC, v. Geometrijski elementi.

PRAVAC U ANALITICI (ili **JEDNADŽBA PRAVCA),** pravac obrađen metodom analitičke geometrije (v. Analitička geometrija). Svaka linearna jednadžba s dvije varijable jeste jednadžba pravca.

Razni oblici jednadžbe pravca.

Opći (implicitni) oblik: $Ax + By + C = 0$

Eksplicitni oblik: $y = ax + b$, gdje je a *koeficijent smjera* ili tangens kuta što ga pravac čini s pozitivnom stranom apscisne osi, a b je *odsječak na osi* y mjeren od ishodišta pa do sjecišta te osi s pravcem;

Segmentni oblik: $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, gdje su m i n segmenti na osi x i na osi y mjereni od ishodišta;

Normalni ili *Hesseov oblik:* $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$, gdje je p normala iz ishodišta na pravac (uzima se uvijek pozitivna), a α je kut između te normale i pozitivnog smjera x-osi.

Pretvaranje općeg oblika u normalni. Iz $Ax + By + C = 0$ dobije se $\frac{Ax + By + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}} = 0.$

Predznak se uzima suprotan od predznaka C.

Udaljenost tačke (x_0; y_0) od pravca.

$$d = -(x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha - p)$$

ili $$d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

drugi korijen i koeficijent C imaju iste predznake.

Udaljenost d izlazi pozitivna ili negativna, već prema tome jesu li tačka i ishodište na istoj strani ili na suprotnim stranama pravca.

Pravac kroz zadanu tačku $(x_1; y_1)$ ima jednadžbu: $y - y_1 = a(x - x_1)$. Ako je a promjenljivo, onda je to i jednadžba pramena pravaca; tačka mu je vrh.

Pravac koji prolazi dvjema tačkama:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Sjecište dvaju pravaca nađe se rješavanjem sistema dviju jednadžbi:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{i} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

Kut dvaju pravaca. Ako se taj kut označi sa φ, a jednadžbe su u općem obliku, onda se dobije

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}$$

ili ako su jednadžbe u eksplicitnom obliku

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_1a_2}$$

Napomene: *uvjet za paralelnost* dvaju pravaca glasi: $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$, tj. $A_1 : A_2 = B_1 : B_2$, ili $a_1 = a_2$. *Uvjet za okomitost* glasi: $A_1A_2 = - B_1B_2$, ili $a_1 = -\frac{1}{a_2}$

Jednadžbe simetrala kutova između dva pravca glase:

$$(x \cos \alpha_1 + y \sin \alpha_1 - p_1) \pm (x \cos \alpha_2 + y \sin \alpha_2 - p_2) = 0$$

Jednadžba pravca koji prolazi sjecištem dvaju pravaca glasi: $(A_1x+B_1y+C_1)+\lambda(A_2x+B_2y+C_2) = 0$. Ako je λ promjenljivo, onda jednadžba predočuje *pramen pravaca.*

PRAVI KUT, v. Kut.

PRAVILNI POLIEDRI, v. Poliedar.

PRAVILNI POLIGONI, v. Mnogokut.

PRAVOKUTNIK, v. Paralelogram. Ima duljinu i širinu. Dužine koje spajaju polovišta suprotnih stranica u pravokutniku zovu se *srednjice* pravokutnika. Pravokutnik ima jednake dijagonale. Oko sjecišta dijagonala pravokutnika kao središta može se *opisati kružnica.* Pravokutnik ima dvije osi simetrije, dakle je dvoosno simetričan lik. Srednjice određuju njegove osi simetrije. Ako u četverokutu obje srednjice određuju njegove osi simetrije, taj je četverokut pravokutnik. Pravokutnik je određen sa dva nezavisna elementa.

Opseg i *površina pravokutnika,* v. Opseg; Površine likova.

PREDZNAK, v. »Algebarski« brojevi.

PRENOŠENJE KUTA, v. Kut.

PRESJECI STOŠCA (ČUNJOSJECI, ČUNJOSJEČNICE, KONUSNI PRESJECI, KONIKE), dobiju se presijecanjem uspravnog kružnog stošca ravninom koja ne prolazi kroz os stošca, i to: *kružnica* se dobije kad ravnina siječe stožac paralelno bazi, *elipsa* kad ravnina nije paralelna bazi, ali siječe sve izvodnice stošca, *parabola* kad je ravnina paralelna jednoj izvodnici stošca, *hiperbola* kad je

ravnina paralelna dvjema izvodnicama, ili paralelna osi stošca, ali ne prolazi kroz os. U analitici se dokazuje da svaki presjek stošca ravninom ima jednadžbu oblika $y^2 = Ax + Bx^2$. Presjek stošca bit će elipsa (specijalno kružnica), parabola ili hiperbola, prema tome da li je koeficijent B manji od nule, jednak nuli ili je veći od nule. Zato se sve tri krivulje i zovu zajedničkim imenom presjeci stošca (v. Parabola; Elipsa; Hiperbola).

PRETPOSTAVKA, v. Poučak.

PRETVARANJE OBIČNIH RAZLOMAKA U DECIMALNE (i obrnuto), postupak da se obični razlomak izrazi u obliku decimalnog broja, i obrnuto.

Pretvaranje običnog razlomka u decimalan broj obavlja se jednostavno tako da se podijeli brojnik nazivnikom. Ako se nazivnik reduciranog razlomka sastoji samo od faktora 2, ili faktora 5, ili faktora 2 i 5, dobije se *konačan decimalan broj.* Inače je običan razlomak jednak *beskonačnom periodskom decimalnom broju.* Znamenka ili grupa znamenki koja se u periodičnom broju stalno ponavlja, shvaćena kao broj, zove se *period.* Ako period počinje odmah na prvom decimalnom mjestu, broj se zove *čisto periodski.* Inače *mješovito periodski,* tj. kad se ispred perioda nalazi znamenka ili grupa znamenki, shvaćena kao broj, koja se ne ponavlja. To se zove *pretperiod.* Čisto periodski broj dobije se ako u nazivniku ne dolaze faktori 2 i 5. Mješovito periodski dobit će se ako pored drugih faktora dolaze i faktori 2 i 5.

Konačan decimalan broj pretvara se u običan razlomak tako da u brojnik običnog razlomka dođe decimalan broj uzet kao cio broj, a u nazivnik dolazi dekadska jedinica s onoliko nula koliko decimalan broj ima decimalnih mjesta.

Čisto periodski decimalan broj pretvara se u običan razlomak tako da se u brojnik običnog razlomka najprije napiše period, a u nazivnik dolazi broj napisan s toliko devetica koliko je u periodu znamenki. Opći postupak, v. Redovi.

Mješovito periodski decimalan broj pretvara se u običan razlomak tako da u brojnik dođe pretperiod i period (shvaćen kao jedan broj) i od toga se oduzme pretperiod, a u nazivnik dolazi broj s toliko devetica koliko je mjesta u periodu, a s toliko nula koliko je mjesta u pretperiodu. Npr.

$$5{,}235\dot{7}\dot{3} = 5\,\frac{23573 - 23}{99900} = 5\,\frac{23550}{99900}$$

PRETVORNIK, v. Višeimenovani brojevi.

PRIBLIŽNA VRIJEDNOST, v. Računanje s približnim vrijednostima.

PRIBROJNIK, v. Zbrajanje.

PRIM BROJEVI, v. Djeljivost brojeva.

PRIRODNI BROJEVI, v. Niz prirodnih brojeva.

PRIZMA, dio prostora omeđen *prizmatičnom plohom* (v. Plohe) i dvije usporedne ravnine koje sijeku tu plohu. Dijelovi strana prizmatične plohe koji omeđuju prizmu jesu paralelogrami. Prema tome je prizma poliedar čije su dvije strane su-

kladni i međusobno usporedni poligoni, a ostale su strane paralelogrami. Sukladni poligoni koji leže u usporednim ravninama zovu se *osnovke* ili *baze,* a ostale strane zovu se *pobočke* prizme. Sve pobočke zajedno čine *pobočje.* Bridovi na bazama zovu se *osnovni bridovi,* a bridovi u kojima se sastaju po dvije pobočke zovu se *pobočni bridovi* prizme. Prizma može nastati i translacijom poligona (baze). Ako osnovka ima n stranica, kaže se da je prizma n-terostrana ($n = 3, 4, 5, \ldots$). Ako su pobočni bridovi okomiti na osnovkama, prizma je *uspravna.* Sve njene pobočke su pravokutnici. Ako su pobočni bridovi kosi prema osnovkama, prizma je *kosa.* Udaljenost između osnovki zove se *visina* prizme. Ako je prizma uspravna, onda je visina jednaka pobočnim bridovima. Uspravna prizma kojoj su osnovke pravilni poligoni zove se *pravilna prizma.*

Dužina koja spaja dva vrha prizme, koji ne leže u istoj plohi, zove se *glavna dijagonala.* Ako se prizma presiječe uzduž jedne njene prostorne dijagonale i pobočnog brida, dobiveni presjek zove se *dijagonalni presjek.*

Prizma kojoj su baze paralelogrami zove se *paralelepiped.* Uspravni paralelepiped kojemu su baze pravokutnici zove se *pravokutan paralelepiped* ili, kraće, *kvadar.* Uspravna prizma kojoj je baza kvadrat zove se *kvadratska* (ili *kvadratna) prizma.* Kvadar kojemu su svi bridovi jednaki zove se *kocka* (kubus, pravilni heksaedar). Ako je d (prostorna) dijagonala, onda je $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$. *Oplošje* i *obujam prizme* (v. Oplošje; Obujam).

PRIZMATOID, tijelo poput *prizme*. Kao baze ima dva nesukladna ili općenito dva različita poligona u paralelnim ravninama. Pobočne plohe su općenito trokuti, ali u posebnom slučaju mogu da budu i četverokuti s dvije paralelne stranice. Ako su kod prizmatoida sve pobočke četverokuti, a baze su dva poligona s istim brojem uzajamno paralelnih stranica, ali ti poligoni nisu ni sukladni ni slični, onda se prizmatoid zove *obelisk*. Ako se produže pobočni bridovi obeliska, oni se ne sijeku u jednoj tački. Ako baze obeliska postanu sukladni ili slični poligoni, prelazi u prizmu ili krnju piramidu. Još je jedan poseban oblik kad se jedna baza reducira na dužinu; tada imamo *sfeniks (klin)*.

PROBLEMI, zadaci riječima koji se svode na rješavanje jednadžbi. Odnosi između poznatih i nepoznatih veličina izraženi su riječima, tj. izraženi su riječima *uvjeti* kojima moraju zadovoljavati traženi brojevi. Ono što je iskazano riječima valja prevesti na algebarski jezik, tj. napisati u obliku *jednadžbe*. Rješenje dobivene jednadžbe daje odgovor na postavljeno pitanje u zadatku. Problem je prvog stepena ako vodi na linearnu jednadžbu; problem je drugog stepena kad je za njegovo rješavanje potrebno riješiti jednadžbu drugog stepena (v. Rješavanje jednadžbi).

Postupak se obično sastoji od: izbora nepoznanice; sastavljanja algebarskih izraza; postavljanja jednadžbe izjednačivanjem dobivenih algebarskih izraza; rješavanje jednadžbe; pokusa (kontrole, diskusije). Diskusija problema drugog stepena sastoji se u tome da se, ne rješavajući same jed-

nadžbe, odredi kad će rješenje zadovoljavati postavljenim uvjetima. Uvjeti mogu biti: uvjeti realnosti; uvjeti predznaka; uvjeti odnosa nepoznanice prema zadanim brojevima.

Da zadatak bude određen i rješiv, mora da iskazuje ili da pretpostavlja ukupno onoliko međusobno nezavisnih i neprotivurječnih odnosa među veličinama koliko ima nepoznatih veličina.

PROCENTNI RAČUN, bavi se izračunavanjem *procenta, osnovne vrijednosti* i *procentnog iznosa.*

Procent je poseban oblik *razlomka* koji izražava stote dijelove cjeline. Takav razlomak s nazivnikom 100 piše se tako da se pored brojnika stavi znak %. Tako napisan broj sa znakom % zove se *postotak* ili *procent.* Veličina od koje se traži procent zove se *osnovna vrijednost.* Broj koji se dobije kad se nađe naznačeni procent od neke vrijednosti zove se *procentni iznos.*

Da bi se našao procentni iznos treba od osnovne vrijednosti uzeti stoti dio, pa ga pomnožiti procentom, t.j $i = \frac{o \cdot p}{100}$ ili $P = \frac{S \cdot p}{100}$ (*i* ili *P* kratice su za procentni iznos, *o* ili *S* za osnovnu vrijednost, *p* za procent). To je *osnovna formula* procentnog računa. Od ovih triju veličina moraju biti dvije zadane da bi se onda treća veličina izračunala kao nepoznanica iz jednadžbe dane osnovnom formulom.

PRODUKT, v. Množenje.

PROGRESIJA, v. Niz.

PROJEKCIJE, geometrijske metode određenog pridruživanja tačaka.

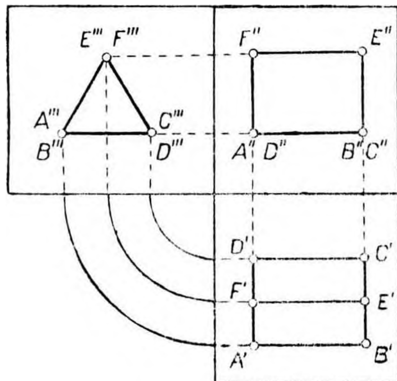
Projekcija na pravac. *Projekcija* (ortogonalna) *tačke T na pravac p* jeste nožište *T'* okomice spuštene iz te tačke na pravac. *Projekcija dužine* na pravac je skup svih projekcija svih tačaka te dužine na pravac. Projekcija dužine *AB* jeste dužina *A'B'* koja spaja projekcije krajnjih tačaka dužine. Ako je dužina prema pravcu okomita, onda je njezina projekcija tačka. Projekcija dužine manja je ili najviše jednaka njoj (slučaj ako je paralelna).

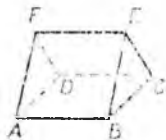
Projekcija na ravninu. Ako se zrake jednog snopa s danim vrhom *S*, koje prolaze svim tačkama nekog lika, presijeku jednom ravninom, onda te zrake probadaju tu ravninu, pa se kaže da one taj lik *preslikavaju* ili *projiciraju* na tu presječnu ravninu. Zrake se zovu *zrake projiciranja.* Probodišta tih zraka s odabranom ravninom određuju skup tačaka koji se zove *centralna projekcija.* Ravnina se zove *ravnina projekcija.* Ako je presječna ravnina paralelna s ravninom lika koji se projicira, onda se lik projicira u *sličan lik.* Tačka *S* je *središte* ili *centar sličnosti* tog preslikavanja. Kako spojnice pridruženih tačaka takvih sličnih likova prolaze centrom sličnosti *S,* kaže se da su ti slični likovi u *perspektivnom položaju.*

Ako su zrake projiciranja međusobno paralelne, projekcija se zove *paralelna.* Te paralelne zrake mogu biti kose odnosno ortogonalne prema ravnini projekcije, pa se u tom slučaju paralelna projekcija zove *kosa* odnosno *ortogonalna.* Važan je *teo-*

rem o trima normalama: ako je ortogonalna projekcija p' pravca p u ravnini projekcije okomita na pravac q te ravnine, tada je i pravac p okomit na pravcu q. Vrijedi i obrat.

Lik što ga zatvaraju projekcije stranica nekog lika zove se *ortogonalna projekcija toga lika.* Projekcija tijela obično je na tri ravnine. Ortogonalna projekcija na horizontalnu ravninu zove se *tlocrt* ili *horizontalna projekcija,* a na vertikalnu ravninu *nacrt* ili *vertikalna projekcija,* a projekcija na treću ravninu koja je okomita na prethodne dvije zove se *bokocrt.* Obično se ove tri ravnine, koje su u prostoru, preklope u jednu ravninu. Npr. u vertikalnu ako se horizontalna i bočna zakrenu za 90° (sl. 62).





Sl. 62

PROJEKTIVNA GEOMETRIJA, v. Geometrija.

PROMJER (PREČNIK, DIJAMETAR), v. Kružnica.

PROMIL (PROMILE), desetina procenta. Oznaka ‰. Primjer: 3 ‰ od 2000 je 6.

PROPORCIJA, v. Razmjeri.

PROSTI BROJEVI, v. Djeljivost brojeva.

PROSTORNI KUT (DIEDAR), v. Geometrijski elementi.

PROSTORNI UGAO, dio prostora što ga izvodi zraka (izvodnica, generatrisa), početak zrake je nepomičan, kližući po obodu bilo koga poligona. Nepomični početak zrake izvodnice zove se *vrh ugla.* Kutovi što ih izvodi zraka izvodnica kližući od jednog do drugog vrha poligona zovu se *bridni kutovi* (ili kraće *strane*) ugla, a njihove ravnine *pobočne ravnine ugla.* Presječnice susjednih pobočnih ravnina zovu se *bridovi ugla.* Kutovi između pobočnih ravnina (strana) zovu se *prikloni kutovi.* Prostorni ugao ima toliko bridnih i toliko priklonih kutova koliko i bridova. Zato se *n-terostrani ugao* zove kraće *n-terobrid.*

Trobrid (triedar) je prostorni geometrijski lik koji određuju tri zrake (bridovi) u prostoru što izlaze iz jedne tačke (vrh) i koje nisu komplanarne. Po dva brida trobrida određuju kut koji se zove *bridni kut.* Po dva brida određuju dio ravnine koji se zove *strana* trobrida. Po dvije strane trobrida čine po jedan *prostorni kut* ili *diedar.* Trobrid je *pravilan* ako ima sve bridne kutove jednake. Za

dva trobrida kaže se da su *sukladna* ako imaju po redu i sve bridne kutove i po redu sve priklone kutove jednake. Zbroj bridnih kutova u trobridu je veći od 0^0, a manji od 360^0. Svaki je od bridnih kutova manji od zbroja, a veći od razlike ostalih dvaju kutova. Prikloni trobrida zadovoljavaju relaciju: $180^0 < \alpha + \beta + \gamma < 540^0$. *Polarni trobrid* se dobije ako se iz tačke unutar trobrida spuste zrake okomito na strane tog trobrida. Ako su u trobridu dva priklona kuta nejednaka, onda većem od tih priklonih kutova leži nasuprot veći bridni kut, i obrnuto. U trobridu nasuprot jednakim priklonim kutovima leže jednaki bridni kutovi, i obrnuto. Dva ugla se zovu *vršna* kad imaju zajednički vrh i kad svaki brid jednoga leži u produženju brida drugoga ugla preko vrha.

PTOLEMEJEV POUČAK, v. Tetivni četverokut.

R

RACIONALIZIRANJE NAZIVNIKA, v. Korjenovanje.

RACIONALNI BROJEVI, v. Područja brojeva.

RAČUN, naziv za niz matematičkih operacija koje omogućuju rješavanje određenih vrsta problema.

RAČUN VJEROJATNOSTI, bavi se pojmom vjerojatnosti i raznim odnosima toga pojma.

Matematička vjerojatnost. Pri jednakom broju *povoljnih* (p) slučajeva događaj je u toliko vjerojatniji ukoliko je manji broj svih *mogućih* (m) slučajeva. Tako je *vjerojatnost* (v) definirana sa $v = \frac{p}{m}$, gdje v može biti samo pravi razlomak.

Protivna vjerojatnost. Vjerojatnost da se događaj neće dogoditi zove se *protivna vjerojatnost* (v'), pa je: $v' = 1 - v$

Totalna vjerojatnost. Može li događaj D nastupiti samo tako da se zbude koji od događaja $D_1, D_2, \ldots, D_r$, koji isključuju jedan drugoga, i

znače li $p_1, p_2, \ldots, p_r$ odgovarajući broj slučajeva koji su povoljni za te događaje, dok je m broj svih mogućih slučajeva, tada da će se dogoditi ili D_1, ili $D_2, \ldots$, ili D_r vjerojatnost je

$$v = \frac{p_1 + p_2 + \ldots + p_r}{m},$$

i zove se *totalna vjerojatnost,* pa je

$$v = v_1 + v_2 + \ldots + v_r.$$

Ovim je iskazan *teorem zbrajanja* vjerojatnosti.

Složena vjerojatnost, vjerojatnost da će se ili zajedno ili jedan za drugim zbiti više događaja, pa je tada $v = \frac{p_1 p_2}{m_1 m_2} = \frac{p_1}{m_1} \cdot \frac{p_2}{m_2} = v_1 \cdot v_2$ (analogno za više od dva događaja). Ovim je iskazan *teorem množenja* vjerojatnosti.

Vjerojatnost ponovljenih pokušaja. Događaj A prilikom nekog ispitivanja ima vjerojatnost p, a protivan događaj B ima vjerojatnost $q = 1 - p$. Izvede li se zaredom n pokušaja, u kojima se u svakom može pojaviti događaj A ili događaj B, tada će vjerojatnost da se A pojavi m puta u n pokušaja biti $v_{m,n} = K_m(n)\, p^m q^{n-m}$. To je *Bernoullijeva formula,* gdje $K_m(n)$ nije ništa drugo nego koeficijent bilo koga člana u razvoju $(q+p)^n$, prema binomnoj formuli. Ovo pravilo zove se ***binomna** razdioba vjerojatnosti* (v. Statistika).

Vjerojatnost a posteriori. Uz klasičnu definiciju vjerojatnosti postoje i druge definicije. U praksi, kada su obično nepoznati potrebni podaci, vjero-

jatnost slučajnog događaja definira se na osnovu pokusa ili promatranja. Ako se izvršilo M promatranja ili pokusa uz iste uvjete, pri čemu se događaj pojavio P puta, a nije se pojavio $M - P$ puta, onda se P zove *frekvencija* pojave događaja A, a omjer $\frac{P}{M}$ *relativna frekvencija* tog događaja. To je *statistička vjerojatnost*, ili *vjerojatnost a posteriori*, ili *empirička vjerojatnost*, za razliku od *matematičke vjerojatnosti* ili *vjerojatnosti a priori*. Ako se izvrši mnogo pokusa ili promatranja, tada se te dvije vjerojatnosti međusobno sve više približavaju, te je $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{P}{M} = \frac{p}{m}$. Ovaj rezultat nije ništa drugo nego jedna od mogućih formulacija tzv. *zakona velikih brojeva* koji je postao osnova statističkog uočavanja zakonitosti i donošenja statističkih zaključaka (v. Statistika). Do primjene računa vjerojatnosti dolazi npr. kod zadataka o osiguranju života, i drugih osiguranja, npr. penzionog, itd.

RAČUNANJE S PRIBLIŽNIM VRIJEDNOSTIMA, dio praktične aritmetike u vezi s približnim i nepotpunim brojevima.

Broj kome su poznate sve znamenke zove se *potpun* ili *tačan* broj. Broj je *nepotpun* ili *netačan* ako su mu, počevši od nekog mjesta, ostale znamenke nepoznate ili su namjerno izostavljene.

Kako u praksi često nisu ni potrebni tačni brojevi, to se brojevi *zaokružuju*, ili pak nisu potrebna sva mjesta, pa se znamenke izostavljaju. Tako se

dobivaju *skraćeni* ili *približni brojevi*. Piše se npr. $\pi \approx 3{,}14$ ili $\pi \doteq 3{,}14$.

Svaki broj y može se shvatiti kao približna vrijednost broja x, pa se razlika $x - y$ između prave vrijednosti x i približne vrijednosti y zove *greška* ili *pogreška* ili, još bolje, *apsolutna greška* toga nepotpunog broja, a može se označiti sa Dy.

Da se dobije *približna manja vrijednost cijelog broja*, ispusti se jedna ili više posljednjih znamenki, a njihova mjesta popune nulama (malim). Da se dobije *približna veća vrijednost cijelog broja*, ispusti se jedna ili više posljednjih znamenki, a njihova mjesta se popune malim nulama, ali se posljednja zadržana znamenka poveća za 1.

Kod *decimalnog broja* dobije se manja približna vrijednost ako se jednostavno ispuste one znamenke iza onog mjesta koje se želi zadržati. Približna veća vrijednost dobije se ako se ispuste znamenke iza onog mjesta koje se želi zadržati, ali se posljednja zadržana znamenka mora povećati za 1. Tada se kaže da je izvršena *korektura*. Ta korektura obavlja se prema pravilu: ako je prva od odbačenih znamenki manja od 5 ili je 5, a iza nje nema više znamenki, uzima se približna manja vrijednost. Ako je prva odbačena znamenka veća od 5 ili je 5, ali iza nje ima još znamenki, onda se izvrši korektura. U ovim slučajevima učini se pogreška koja je manja od polovine jedinice posljednjeg zadržanog mjesta. Broj što ga apsolutna vrijednost pogreške može najviše poprimiti, ali nikad premašiti, zove se *granica pogreške*.

Tačnost ili *stupanj tačnosti* nepotpunog broja zove se kvocijent tog broja i granice njegove pogreške. Procjenjivanje tačnosti rezultata nekog mjerenja bolje se određuje *relativnom pogreškom,* koja predstavlja kvocijent apsolutne pogreške prema tačnoj vrijednosti, tj. $\frac{Dy}{x}$. Ako se pak relativna pogreška pomnoži sa 100, dobit će se *procentna pogreška,* koja kazuje koliki udio greške otpada na svakih 100 jedinica traženog broja.

Skraćeno računanje.

S potpunim brojevima. Brojevi se skraćuju ili odmah prije računanja ili tokom računanja.

Zbrajanje. Npr. 28,13568 + 0,5672 + 845,328 = ? (na 3 decimale). Rješenje:

$$\begin{array}{r} 28{,}136 \\ 0{,}567 \\ +\ 845{,}328 \\ \hline 874{,}031 \end{array}$$

Ovdje se pribrojnici najprije skrate na 3 decimale, pa se onda jednostavno izvrši zbrajanje.

Oduzimanje. Npr. 572,294632 — 24,09505 = ? (na 2 decimale). Rješenje:

$$\begin{array}{r} 572{,}29 \\ -\ 24{,}10 \\ \hline 548{,}19 \end{array}$$

Granica pogreške je u rezultatu $2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = 0{,}01$,

a to znači da je posljednja znamenka nepouzdana, dakle je rezultat tačan na 1 decimalu. (Zato uzeti brojeve zaokružene na 3 decimale).

Množenje. Jedinice multiplikatora potpišu se ispod onog mjesta multiplikanda do koga se hoće izračunati produkt, a zatim se ostale znamenke multiplikatora potpisuju obrnutim redom. Npr.

3,1415	9 · 25,45268 (na 3 decimale)
862 5452	
6 2832	
1 5708	
1256	
157	
6	
2	
79, 961	

Svaka znamenka multiplikatora množi se znamenkom koja je u multiplikandu desno od nje i uzme se korektura koja se pribraja produktu te znamenke i one koja je iznad nje. Tako se dobije parcijalni produkt, itd. Na kraju se zbroje parcijalni produkti.

Dijeljenje. Pravilo: odredi se mjesna vrijednost prve znamenke kvocijenta i prema traženoj tačnosti broj njegovih znamenki: skraćeni divizor zadrži samo toliko znamenki koliko ih ima skraćeni kvocijent, a prva izostavljena znamenka uzme se u obzir prilikom korekture; skraćeni dividend zadrži toliko mjesta koliko i skraćeni divizor, ili za jednu znamenku više, ako je prva znamenka dividenda manja od prve znamenke divizora. Ostale se znamenke izostave; ako ih je premalo, mogu se popuniti nulama.

Primjer: 0,23745683 : 0,745246 (na 4 decimale)

Rješenje: 0,23745|683 : 0,7452|46 = 0,3186

1388
643
47
3

U kvocijentu je posljednja znamenka nepouzdana.

S nepotpunim brojevima. Najprije valja odrediti do kojeg će mjesta znamenke u rezultatu biti pouzdane, pa se prema tome izvodi skraćeno računanje najviše do onog posljednjeg pouzdanog mjesta. Dalji je postupak isti kao i pri skraćenom računanju s potpunim brojevima.

RAČUNSKE OPERACIJE, v. Osnovne računske operacije.

RADICIRANJE, v. Korjenovanje.

RADIJAN, v. Sistemi mjera.

RADIJUS (POLUMJER), v. Kružnica.

RADIJUS-VEKTOR, v. Vektori; Elipsa; Hiperbola; Parabola; Koordinatni sistem.

RADIKAND, veličina pod korijenom (v. Korjenovanje).

RASPOLOVNICA dužine, kuta, v. Simetrija.

RASTAVLJANJE (na proste faktore prirodnih brojeva), v. Djeljivost brojeva.

RAVNALO, v. Geometrijsko crtanje.

RAVNINA, v. Geometrijski elementi; Analitička geometrija.

RAZLOMCI, brojevi uvedeni pri operaciji dijeljenja ili pri mjerenju.

Obični (aritmetički) razlomci.
Iz praktičnih potreba za rastavljanjem (dijeljenjem) cjelina na manje dijelove, ili potreba za mjerenjem, uvedeni su novi brojevi koji pokazuju na koliko i na kakve je dijelove rastavljena jedinica ili neka cjelina. Tako su uvedeni razlomci koji se sastoje od *brojnika*, koji pokazuje koliko je jednakih dijelova uzeto, i od *nazivnika*, koji pokazuje na koliko je jednakih dijelova podijeljena jedinica. Brojnik se piše iznad *razlomačke crte*, a nazivnik ispod. Ali ne samo pri mjerenju nego i pri dijeljenju dolazi se do razlomaka kada se razlomak shvaća kao kvocijent cijelih brojeva. Naznačeni kvocijent dvaju brojeva može se predočiti u obliku razlomka tako da se u brojnik stavi dividend, a u nazivnik divizor. Razlomačka crta znači isto što i znak dijeljenja.

Vrste razlomaka. Razlomak kod koga je brojnik manji od nazivnika, manji je od jedinice i zove se *pravi razlomak*. Ako je brojnik veći od nazivnika, razlomak je veći od jedinice i zove se *nepravi razlomak*. Ako je brojnik djeljiv nazivnikom, razlomak se zove *prividni razlomak* (ubraja se u neprave). Broj koji se sastoji od cijelog broja i razlomka zove se *mješoviti broj*. Mješoviti broj pretvara se u nepravi razlomak tako da se cijeli broj pomnoži nazivnikom i dobivenom produktu pribroji brojnik. Ta suma bude brojnik nepravog razlomka, a nazivnik ostaje pređašnji. Obrnuto, nepravi razlomak

pretvara se u mješoviti broj tako da mu se brojnik podijeli nazivnikom. Dobiveni nepotpuni kvocijent jesu cijele jedinice mješovitog broja, a ostatak dijeljenja je brojnik preostalog pravog razlomka kojemu je nazivnik jednak pređašnjem nazivniku zadanog nepravog razlomka.

Ako su ili u brojniku, ili u nazivniku, ili i u brojniku i nazivniku umjesto cijelih brojeva razlomci, govori se o *dvojnom razlomku.*

Decimalni razlomak je razlomak kome su u nazivniku isključivo dekadske jedinice, tj. potencije baze 10. *Decimalni brojevi* nisu ništa drugo nego drugačije pisani decimalni razlomci. Obični razlomak pretvara se u decimalni tako da se brojnik podijeli nazivnikom (v. Pretvaranje običnih razlomaka u decimalne, i obrnuto).

Ako dva razlomka imaju jednake nazivnike, onda je veći onaj koji ima veći brojnik. Ako dva razlomka imaju jednake brojnike, a različite nazivnike, onda je veći onaj koji ima manji nazivnik. Prema tome, za razlomke s promjenljivim brojnikom i nazivnikom može se reći: vrijednost razlomka raste (pada) ako mu raste (pada) brojnik; vrijednost razlomka raste (pada) ako mu pada (raste) nazivnik.

Vrijednost se razlomka ne mijenja, nego samo oblik, ako se brojnik i nazivnik pomnože jednim te istim brojem. Kaže se da je izvršeno *proširenje razlomka.* Broj kojim se množi brojnik i nazivnik zove se *faktor proširitelj.* Slijedi da se svaki razlomak može napisati na neizmjerno mnogo načina. Ako se brojnik i nazivnik jednog razlomka podijele

jednim te istim brojem, kaže se da je razlomak *skraćen,* ili da je izvršeno *skraćivanje* razlomka. I pri tome se vrijednost razlomka ne mijenja, nego samo oblik. Razlomak koji se dalje ne može skraćivati zove se *reducirani* ili *do kraja skraćeni razlomak.*

Svođenje razlomaka: na zadani nazivnik: treba naći koliko se puta nazivnik razlomka nalazi u novom nazivniku, pa se tim brojem pomnoži brojnik i nazivnik zadanog razlomka; *na zajednički nazivnik:* dva razlomka nejednakih nazivnika svode se na **najmanji zajednički nazivnik** tako da se za svaki nazivnik nađe njegov faktor proširitelj, pa se zatim brojnik svakog razlomka pomnoži odgovarajućim faktorom proširiteljem.

Algebarski razlomci.

Kada ili u brojniku ili u nazivniku ili i u brojniku i u nazivniku dolaze opći brojevi, odnosno kakvi god matematički izrazi, onda se razlomak zove *algebarski razlomak;*

Proširivanje algebarskih razlomaka: $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$

Skraćivanje algebarskih razlomaka:

$$\frac{am}{bm} = \frac{a}{b}, \left(m \neq 0 \right)$$

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ znači isto i jednakost $ad = bc$, uz uvjet da je $b \neq 0$ i $d \neq 0$

Operacije s razlomcima, v. Zbrajanje; Oduzimanje; Množenje; Dijeljenje;

RAZMJER (ili PROPORCIJA), *izjednačenje dvaju omjera;* $a : b = c : d$, a je prvi, b drugi, c treći, d četvrti član; a i d su vanjski, b i c unutarnji članovi. Ako 4 dužine čine razmjer zovu se *razmjerne* ili *proporcionalne dužine.*

Pravila: Iz $a : b = c : d$ slijedi $ad = bc$ ili $d = \frac{bc}{a}$ *(četvrta geometrijska proporcionala),* v. Geometrijske konstrukcije.

Iz $a : b = c : d$ slijedi $(a + b) : b = (c + d) : d$, ili $(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$. Ako je $a : b = c : d$, onda je $a : c = b : d$. Iz $a : b = c : d$ slijedi $ka : b = kc : d$, ili $a : kb = c : kd$. Iz $a : b = c : d$ slijedi $a^n : b^n = c^n : d^n$ ili $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$

U razmjeru $a : x = x : b$ ili $x : b = c : x$ broj x zove se *srednja geometrijska proporcionala,* tj. $x = \sqrt{ab}$ ili $x = \sqrt{bc}$

Ako se na jednoj zraci pramena, počevši od vrha, nanesu dvije dužine, a na drugoj njima razmjerne dužine, onda su pravci koji prolaze krajevima pridruženih (homolognih) dužina među sobom paralelni. Vrijedi i obratno.

Slično vrijedi i u prostoru.

Ako je $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$ i $a_2 : a_3 = b_2 : b_3$, onda se kraće piše $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$. To je *produženi razmjer*. Može se pisati $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k$. Iz $a : b : c = d : e : f$ slijedi

$$\frac{a+b+c}{d+e+f}=\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}=k$$

Primjena razmjera značajna je u praktičnom životu (pravilo trojno, složeno pravilo trojno, procentni račun, kamatni račun, račun diobe, račun smjese, i dr.).

RAZMJERNOST, opći naziv za pojam razmjernih veličina (v. Razmjer).

REALNI BROJEVI, v. Područja brojeva.

RECIPROČNA VRIJEDNOST, novi razlomak koji se dobiva ako brojnik i nazivnik razlomka zamijene svoja mjesta (v. Razlomci; Dijeljenje). Svaki broj pomnožen svojom recipročnom vrijednošću daje jedinicu.

REDOVI, naznačene sume članova niza brojeva, ako se članovi nekog niza brojeva povežu znakom +, dobije se *red brojeva* ili *serija brojeva.* Članovi niza postali su članovi reda. Npr. iz niza a_1, a_2, a_3, ..., a_n nastaje red $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Ako ima konačno mnogo članova, red je *konačan.* Ako red ima beskonačno mnogo članova, red je *beskonačan.* Opći je oblik beskonačnog reda: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Kolika je ta suma ne može se odmah reći, nego se iz beskonačnog reda načini *niz parcijalnih suma* članova reda: $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$, ..., $s_n = a_1 + \ldots + a_n$, pa se proučavanje reda svodi na proučavanje ovog niza. Suma beskonačnog reda definira se kao *limes* ili granična vrijednost *niza parcijalnih suma* ako broj članova

n teži u beskonačnost. Ako je S suma beskonačnog reda, onda se piše $\lim_{n\to\infty} (a_1 + \ldots + a_n) = \lim_{n\to\infty} s_n = S$.

Ako je suma beskonačnog reda određen broj, kaže se da red *konvergira* ili da je *konvergentan;* u svakom drugom slučaju red *divergira* ili red je *divergentan.*

Konvergentni i divergentni redovi, naročito *redovi funkcija,* proučavaju se u općoj *teoriji redova.* Kako je aritmetički beskonačan red uvijek divergentan, to se posebno i ne proučava. Naprotiv, beskonačni geometrijski red koji ima oblik: $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots$ konvergentan je samo ako je $|q| < 1$, u tom se slučaju za sumu beskonačnog reda dobije formula $S = \frac{a_1}{1 - q}$. Beskonačni geometrijski red primjenjuje se, npr., prilikom pretvaranja periodskih decimalnih brojeva u obične razlomke, i to:

Ako je *decimalni razlomak* (r) *čisto periodičan* (period p ima t znamenki), onda je:

$$r = \frac{p}{10^t} + \frac{p}{10^{2t}} + \frac{p}{10^{3t}} + \ldots = \frac{p}{10^t} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^t}} =$$

$$= \frac{p}{10^t - 1} \quad \text{Npr. } 0,\dot{2}\dot{5} = \frac{25}{99}$$

Decimalni razlomak (r) je mješovito periodičan.

Općenito: $0{,}appp\ldots = 0{,}a\dot{p} = \frac{a}{10^m} + \frac{p}{10^{m+n}} +$

$$+ \frac{p}{10^{m+2n}} + \ldots = \frac{(a \cdot 10^n + p) - a}{(10^n - 1) \cdot 10^m}, \text{ gdje je}$$

a pretperiod, p period, m broj mjesta u pretperiodu, a n broj mjesta u periodu. Npr.

$$0,31\dot{2}7\dot{5} = \frac{31275 - 31}{99900}$$

REDUCIRANI RAZLOMAK, v. Razlomci.

REDUCIRANJE, v. Opći brojevi; Višeimenovani brojevi.

REKTIFIKACIJA, izračunavanje duljine luka neke krivulje (v. Integralni račun).

RELATIVNA POGREŠKA, v. Računanje s približnim vrijednostima.

RELATIVNI BROJEVI, v. »Algebarski« brojevi.

RESOLVIRANJE, v. Višeimenovani brojevi.

RIMSKE BROJKE, v. Sistemi brojeva.

RJEŠAVANJE JEDNADŽBI, postupak pomoću kojeg se određuje vrijednost nepoznanice za koju je jednadžba zadovoljena.

Linearna jednadžba (prvog stepena) može se postepenim transformiranjem svesti na sebi ekvivalentnu jednadžbu oblika $x - a = 0$, odnosno $x = a$. *Postupak:* osloboditi se razlomaka; osloboditi se zagrada; prenijeti članove s nepoznanicom na jednu stranu, a poznate na drugu; srediti (reducirati) lijevu i desnu stranu; podijeliti jednadžbu koeficijentom uz nepoznanicu; izvršiti pokus (probu).

Sređeni oblik glasi: $ax = b$, gdje su a i b ma kakvi brojevi. *Diskutirati* jednadžbu $ax = b$ znači ispitati uz koje uvjete jednadžba *ima* ili *nema* rješenja ili je *neodređena.* Ako je $a \neq 0$, jednadžba

ima *jedan, određen korijen;* ako je $a = 0$, $b \neq 0$, jednadžba je *nemoguća;* ako je $a = 0$ i $b = 0$, jednadžba je *neodređena* jer ima *beskonačno mnogo rješenja.*

Rješavanje kvadratne jednadžbe.

Čista kvadratna jednadžba $x^2 = a$ daje $x = \pm\sqrt{a}$

Nepotpuna kvadratna jednadžba bez trećeg člana: $ax^2 + bx = 0$. Slijedi $x(ax + b) = 0$, tj. $x_1 = 0$

a iz $ax + b = 0$ slijedi $x_2 = -$

h

Opći oblik kvadratne jednadžbe: $ax^2 + bx + c = 0$, gdje su a, b, c realni brojevi uz uvjet da je $a \neq 0$.

Korijeni su: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Priroda korijena zavisi od izraza $D = b^2 - 4ac$, koji se zove *diskriminanta.* Moguća su tri slučaja: ako je $D > 0$, oba korijena su realna i različita. Ako je $D < 0$, korijeni su konjugirano kompleksni. Ako je $D = 0$, oba su korijena realna, ali jednaka (jedan dvostruki korijen).

Svojstva korijena: $S = x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $P = x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$. To su *Vièteove* formule. Da oba korijena budu pozitivna, nužan i dovoljan je uvjet $D \geq 0$, $S > 0$, $P > 0$. Pomoću tih formula može se lako napisati jednadžba kojoj su zadani korijeni x_1 i x_2, naime: $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0$. One služe i pri rastavljanju kvadratnog trinoma na pro-

ste faktore: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. Razlike $x - x_1$ i $x - x_2$ zovu se *korijenski faktori.*

Grafičko rješavanje jednadžbi. Jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$ svede se na oblik $ax^2 = -bx - c$, pa se stavi $y = ax^2$ i $y = -bx - c$ i predoči grafički, tj. konstruira se parabola i pravac. Apscise njihovih presjecišta jesu rješenja kvadratne jednadžbe. Općenito: ako je jednadžba $f(x) = 0$, tada se nacrta graf $y = f(x)$. Ako on siječe apscisnu os, onda je apscisa tog sjecišta realno rješenje zadane jednadžbe, a ako graf dodiruje apscisnu os, onda je korijen dvostruk.

Binomne jednadžbe: $ax^n \mp b = 0$, ili $x^n \mp \frac{b}{a} = 0$, $(a > 0,\ b > 0)$. Supstitucijom $x = y\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ svodi se na $y^n \mp 1 = 0$, koja se rješava rastavljanjem na faktore (rastavljanje binoma, v. Djeljivost brojeva).

Trinomne jednadžbe: $ax^m + bx^n + c = 0$. Ako je $m = 2n$ poprima oblik: $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, a supstitucijom $x^n = y$ se svodi na $ay^2 + by + c = 0$. To je *resolventa* trinomne jednadžbe. Nađu se rješenja y_1 i y_2. Sada treba još riješiti dvije binomne jednadžbe: $x^n = y_1$, $x^n = y_2$. Ako je $n = 2$, trinomna jednadžba zove se *bikvadratna*, tj. $ax^4 + bx^2 + c = 0$.

Jednadžba 4. stupnja: $a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$. Jednostavno se rješava kad je *simetrična,*

tj. $a_4 = a_0$, $a_3 = a_2$. Podijelivši sa x^2 izvrši se supstitucija $x + \frac{1}{x} = u$, pa se svede na kvadratnu.

Logaritamska jednadžba: ako u njoj dolaze logaritmi izraza koji sadrže nepoznanicu. Ako je oblika $\log f(x) = \log g(x)$, onda se dobije algebarska jednadžba $f(x) = g(x)$.

Eksponencijalna jednadžba: nepoznanica dolazi u eksponentu. Rješavaju se ovi jednostavniji slučajevi: ako je oblika: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, onda je $f(x) = g(x)$; ako je $a^{f(x)} = b^{g(x)}$, onda se logaritmiranjem dobije $f(x) \log a = g(x) \log b$; u nekim se slučajevima zgodnom supstitucijom prevodi eksponencijalna u algebarsku jednadžbu.

Trigonometrijska jednadžba: u njoj se nalaze trigonometrijske funkcije nepoznatog kuta. Jednadžba se transformira upotrebom trigonometrijskih relacija tako da u novoj jednadžbi dolazi samo jedna trigonometrijska funkcija nepoznatog kuta. Ako su u jednadžbama dva nepoznata kuta, onda se metodom supstitucije dobiva jednadžba u kojoj je samo jedna funkcija jednog nepoznatog kuta.

ROMB, paralelogram koji ima sve stranice jednake. Dijagonale romba međusobno su okomite. Ima dvije osi simetrije, to su spojnice njegovih vrhova. On je dvoosno simetričan lik. Dijagonale romba određuju njegove osi simetrije. Vrijedi i obrat. Dijagonale romba raspolavljaju kutove. Iz sjecišta dijagonala kao središta može se *upisati kružnica*. Romb je određen sa dva elementa.

Površina romba, v. Površine likova.

ROMBOID, paralelogram u kome su po dvije stranice međusobno jednake i po dva kuta međusobno jednaka (po dva oštra i dva tupa kuta). Dijagonale romboida presijecaju se pod oštrim kutom i međusobno se raspolavljaju. Romboidu se ne može ni upisati ni opisati kružnica.

ROTACIJA, gibanje kod koga tačka ili tačke opisuju kružnice oko zajedničkog središta, ili oko središta koja leže na jednom pravcu.

U ravnini. Ako je u ravnini zadana tačka *O* (središte) i usmjereni kut ω, tada rotirati u toj ravnini neku tačku *T* oko tačke *O* za kut ω znači tački *T* pridružiti u toj ravnini tačku T_r sa svojstvom da bude $\measuredangle \overrightarrow{TOT_r} = \omega$ i $OT = OT_r$. Tačka *T* je preslikana u tačku T_r rotacijom oko središta *O*. Rotirati lik oko tačke *O* kao središta za zadani kut znači tome liku *S* pridružiti lik S_r koji nastaje rotacijom svih tačaka lika *S* za zadani kut oko središta. Lik *S* je preslikan u lik S_r. Rotacijom dužina *AB* prelazi u jednaku dužinu A_rB_r. Rotacijom svaki lik prelazi u sukladan lik.

U prostoru. Kaže se da tačka *T* rotira oko pravca *s* (os rotacije) ako tačka *T* u ravnini rotacije, koja je okomita na os rotacije, rotira oko tačke *O* (središte rotacije) u kojoj os rotacije probada ravninu rotacije. Rotacijom oko osi *s* za dani kut dužina prelazi u jednaku dužinu A_rB_r. Rotacijom oko osi *s* svaki geometrijski lik *S* prelazi u sukladan lik S_r.

Rotacione plohe. Ako se neka krivulja *k* nalazi u poluravnini, pa se ona zavrti oko međašnjeg

pravca *o* kao osi rotacije, tada ta krivulja pri toj rotaciji opisuje oblu plohu koja se zove *rotaciona ploha.* Tačke krivulje opisuju kružnice u paralelnim ravninama koje su okomite na os rotacije. Te kružnice zovu se *paralele.* Svaka poluravnina kroz os rotacije siječe rotacionu plohu u krivulji koja se zove *meridijan* ili *izvodnica* rotacione plohe. Svi su meridijani kongruentni s krivuljom koja je izvela rotacionu plohu. Ako je pravac koji izvodi rotaciju paralelan osi rotacije, izvedena rotaciona ploha je *valjkasta rotaciona ploha.* Ako pravac siječe os rotacije, izvedena ploha je *stožasta rotaciona ploha.* Ako je krivulja *k* polukružnica sa središtem i promjerom na osi rotacije, izvedena rotaciona ploha je *kuglina ploha.*

Površina rotacione plohe, v. Integralni račun.

Rotaciono tijelo, dio prostora koji je omeđen rotacionom plohom i dvjema ravninama okomitim na os rotacije. *Volumen* rotacionog tijela, v. Integralni račun.

Rotacija koordinatnog sistema, v. Transformacija koordinata.

S

SABIRANJE, v. Zbrajanje.

SEDMICA, naziv za brojku 7 ili za broj 7 upotrijebljen pri numeriranju predmeta. Sedmica je naziv i za *tjedan.*

SEGMENT, dio ravnine omeđene lukom krivulje i pripadnom tetivom, npr. segment kruga, ili dio tijela omeđen ravninom, koja ga presijeca, i dijelom njegove plohe, npr. segment kugle. Segmentom se naziva i skup tačaka na pravcu između dvije tačke A i B, kojem pripadaju i same tačke A i B (v. Interval).

SEKANS, v. Trigonometrija.

SEKANTA, pravac koji siječe krivulju (v. Kružnica; Diferencijalni račun).

SEKSAGEZIMALNI SISTEM, v. Sistemi brojeva.

SEKUNDA, v. Sistemi mjera.

SFENIKS, (KLIN), v. Prizmatoid.

SFERNA GEOMETRIJA, geometrija na površini kugle. Proučava likove na kuglinoj plohi. U sfernoj

geometriji najkraća spojnica između dviju tačaka na kugli jeste *luk glavne kružnice*.

Koje god dvije najveće kružnice na kugli sijeku se u krajnjim tačkama zajedničkog promjera kugle. Ravnine tih kružnica čine prikloni kut α. Kaže se da dvije najveće kružnice čine *sferni kut* α na kugli. To je u stvari kut između tangenata na glavnim kružnicama u njihovim polovima.

Dio kugline plohe omeđen s dvije najveće polukružnice zove se *sferni dvokut*, kome odgovara na vrhovima sferni kut α.

U sfernoj geometriji glavne kružnice imaju istu ulogu kao i pravci u geometriji ravnine. Pravci koji spajaju po dvije od tri zadane tačke (koje nisu kolinearne) određuju trokut. Isto tako glavne kružnice koje prolaze tačkama A, B i C (kad sve tri ne leže na jednoj glavnoj kružnici) definiraju *sferni trokut* ABC. Stranice toga trokuta a, b i c jesu lukovi $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CA}$ i $\overset{\frown}{AB}$ na glavnim kružnicama, kutovi sfernog trokuta α, β i γ jesu kutovi između tangenata na glavnim kružnicama u tačkama A, B i C. U ravninskoj geometriji pravac koji prolazi dvjema tačkama A i B jednoznačno određuje njihovu udaljenost. Međutim, u sfernoj geometriji to nije slučaj; glavna kružnica koja ide tačkama A i B definira dvije spojnice, dva luka koji se međusobno nadopunjuju do 2π, a manji luk u stvari je najkraća spojnica između A i B. To se zove *sferna udaljenost* AB. Ranije definirani trokut, prema tome, može imati stranice između 0 i π, pa su to u stvari *Eulerovi trokuti*, jer su u takvim troku-

tima stranice uvijek manje od π. Eulerovi trokuti imaju ova svojstva: stranice i kutovi leže između 0 i π; tri tačke na kugli definiraju jedan jedini Eulerov trokut ukoliko po dvije od njih nisu međusobno dijametralne; suma stranica leži između 0 i 2π; suma kutova leži između 0 i 3π; većem kutu odgovara veća stranica, a nasuprot jednakim kutovima jednake su i stranice.

Razlika između sume kutova (S) u sfernom trokutu i π označuje se sa e $(= \alpha + \beta + \gamma - 180^0 = S - \pi)$ i naziva se *sferni eksces.* Za Eulerove trokute vrijedi da je svaka stranica manja od sume, a veća od razlike ostalih dviju stranica. Poučci o sukladnosti koji vrijede u planimetriji vrijede i za njih, s tim da im se priključuje i jedan novi: dva su Eulerova trokuta sukladna ako su im sva tri kuta jednaka. (U planimetriji to je uvjet sličnosti.) U sfernoj geometriji ne postoje slični trokuti.

Površina sfernog trokuta:

$$P = \frac{r^2 \pi}{180^0}\left(S - 180^0\right)$$

ili $$P : 4r^2\pi = e : 720^0$$

tj. površina sfernog trokuta odnosi se prema površini kugle kao sferni eksces prema 720^0 $(= 8 \cdot 90^0)$.

SFERNA TRIGONOMETRIJA, ispituje relacije između stranica i kutova *sfernog trokuta,* tj. između bridnih i plošnih kutova trobrida. Dolazi do primjene trigonometrijskih relacija i poučaka. U sfernoj trigonometriji rješavaju se računom svi stereo-

metrijski zadaci u kojima u obzir dolaze bridni i plošni kutovi.

Pravokutan sferni trokut ($\gamma = 90^0$). Ako je c hipotenuza, a i b katete, a α i β kutovi nasuprot katetama, tada postoje ove relacije:

$\cos c = \cos a \cdot \cos b$	$\cos c = \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta$
$\cos \alpha = \cos a \cdot \sin \beta$	$\cos \beta = \cos b \cdot \sin \alpha$
$\sin b = \sin c \cdot \sin \beta$	$\sin a = \sin c \cdot \sin \alpha$
$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} c \cdot \cos \beta$	$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} c \cdot \cos \alpha$
$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin b$	$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} \beta \cdot \sin a$

Neperovo pravilo: pripiše li se na vrhovima peterokuta najprije c, onda s jedne i s druge strane α i β, pa komplementi kateta, tj. $90^0 - a$ suprotno od α, $90^0 - b$ suprotno od β, onda: kosinus svakoga od 5 elemenata jednak je produktu kotangensa bližih dvaju elemenata, ili produktu sinusa daljih dvaju elemenata.

Kosokutan sferni trokut. Neka su a, b, c stranice, a α, β, γ odgovarajući kutovi sfernog trokuta.

Poučak o sinusima: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma$. Upotrebljava se kad su zadana dva kuta i jedna stranica koja je nasuprot jednome od tih kutova, ili dvije stranice i kut koji je nasuprot jednoj od tih stranica.

Poučak o kosinusima stranica:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha$$
$$\cos b = \cos c \cdot \cos a + \sin c \cdot \sin a \cdot \cos \beta$$
$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma$$

Upotrebljava se kad su zadane dvije stranice i kut među njima.

Poučak o kosinusima kutova:

$$\cos\alpha = -\cos\beta\cdot\cos\gamma + \sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\cos a$$
$$\cos\beta = -\cos\gamma\cdot\cos\alpha + \sin\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\cos b$$
$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos c$$

Upotrebljava se kada je zadana stranica i dva kuta na njoj.

Formule za izračunavanje kutova iz zadanih triju stranica:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin b\cdot\sin c}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin s\cdot\sin(s-a)}{\sin b\cdot\sin c}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin s\cdot\sin(s-a)}}$$

gdje je $2s = a + b + c$

Analogno se dobiju formule za $\frac{\beta}{2}$ i $\frac{\gamma}{2}$ cikličkom zamjenom slova.

Postoje još i ove relacije:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\sin(s-a)}, \quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\sin(s-b)},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\operatorname{tg}\varrho}{\sin(s-c)} \quad \text{gdje je:}$$

$$\operatorname{tg}\varrho = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\cdot\sin(s-b)\cdot\sin(s-c)}{\sin s}}$$

a ϱ je sferni radijus upisane kružnice.

Formule za izračunavanje stranica iz zadanih triju kutova:

$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos S \cdot \cos(S-\alpha)}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}}$$

$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\cos(S-\beta) \cdot \cos(S-\gamma)}{\sin\beta \cdot \sin\gamma}}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{a}{2} = \sqrt{-\frac{\cos(S-\beta) \cdot \cos(S-\gamma)}{\cos S \cdot \cos(S-\alpha)}}$$

gdje je $2S = \alpha + \beta + \gamma$

Napomena: sferni trokut određen je i sa tri kuta.

Delambertove (ili Gaussove) jednadžbe:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a+b}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{c}{2} = \cos\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \sin\frac{c}{2} = \sin\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

Kao posljedica ovih relacija slijede:

Neperove analogije:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

L'Huilierova formula:

$$\operatorname{tg}\frac{e}{4}=\sqrt{\operatorname{tg}\frac{s}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-a}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-b}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{s-c}{2}}$$

gdje je e sferni eksces, tj. $e=\alpha+\beta+\gamma-180^0$, a $2s=a+b+c$

Napomena: sferna trigonometrija se primjenjuje u stereometriji, geografiji, geodeziji, a naročito u astronomiji.

SFERNI DVOKUT, v. Sferna geometrija.

SFERNI TROKUT, v. Sferna geometrija.

SIGMA (Σ grčko slovo), v. Znak sumacije.

SIMBOL, v. Matematički znakovi.

SIMETRALA DUŽINE, v. Simetrija.

SIMETRALA KUTA, v. Simetrija.

SIMETRIJA, svojstvo geometrijskih likova i tvorevina izraženo u određenom pravilnom rasporedu ili pridruživanju tačaka.

Ravninska simetrija.

Tačke A i A_s simetrično su pridružene s obzirom na ravninu simetrije ako je njihova spojnica okomita na tu ravninu, a njihove udaljenosti od nje jednake. Tačke A i A_s dobivene su *zrcaljenjem.*

Simetralna ravnina dužine je ona ravnina koja je okomita na tu dužinu u njenom polovištu.

Zrcaljenjem na ravnini dužina AB se preslikava u *simetrično pridruženu* dužinu A_sB_s, pri čemu je $AB = A_sB_s$. Ako je pravac a usporedan s ravninom, onda je s njom usporedan i simetrično pridruženi pravac a_s.

Zrcaljenjem na ravnini Σ, ravnina Π preslikava se u simetričnu ravninu Π_s. Ako je Π koso položena prema Σ, onda Σ raspolavlja prostorni kut između Π i Π_s.

Ako se geometrijski lik (ploha, tijelo, ...) može presjeći ravninom Σ na dva dijela, koja su simetrično pridružena s obzirom na ravninu Σ, kaže se da je taj lik *simetričan* s obzirom na ravninu ili da ima *simetralnu ravninu.*

Osna simetrija. Tačke A i A_s simetrično su pridružene s obzirom na pravac s, ako pravac s raspolavlja dužinu AA_s i na njoj je okomit. Pravac s zove se *os simetrije.* Ako se ravan lik može presjeći pravcem s na dva dijela, koji su simetrično pridruženi s obzirom na taj pravac, kaže se da je taj lik

osno simetričan. Pravac *s* je os *simetrije* ili *simetrala.*

Simetrala dužine je pravac koji raspolavlja dužinu i na njoj je okomit (v. Geometrijske konstrukcije).

Simetrala kuta je zraka koja prolazi vrhom kuta, a dijeli ga na dva jednaka dijela. Zove se i *raspolovnica kuta* (v. Kut).

Simetrija mnogokuta, v. Mnogokut.

Osna simetrija u prostoru. Kaže se da su tačke A i A_0 simetrične s obzirom na pravac o, ako je taj pravac simetrala dužine AA_0. Pravac o zove se *os simetrije.* Zadanom geometrijskom liku L odredi se osno simetričan lik L_0 s obzirom na pravac o na taj način da se lik L rotira oko osi o za 180^0. Tijelo je *osno simetrično* ili ima *os simetrije* ako se može odrediti pravac tako da se svakoj tački tog tijela može s obzirom na taj pravac simetrično pridružiti druga tačka tijela koja je s prvom osno simetrična. Ako se simetrično tijelo presiječe ravninom koja prolazi kroz os simetrije, dobije se *osni presjek* tog tijela.

Centralna simetrija. Ako tačka C raspolavlja dužinu AA_c, onda se kaže da su tačke A i A_c simetrično pridružene s obzirom na tačku C kao *centar simetrije.* Dvije centralno-simetrično pridružene dužine usporedne su i suprotno usmjerene, a jednako su udaljene od centra simetrije. Analogno za pravac. Neki geometrijski lik ima *centar simetrije* ako se može odrediti tačka C tako da se svakoj po volji uzetoj tački tog lika može pridružiti druga

tačka tog lika koja je s prvom centralno-simetrična s obzirom na tačku C.

SINUS, v. Trigonometrija.

SISTEM JEDNADŽBI, više jednadžbi s više nepoznanica uzetih zajedno.

Sistem dvije linearne jednadžbe s dvije nepoznanice. Jedna jednadžba s dvije nepoznanice, tj. $ax + by = c$, zadovoljena je s konačno ili beskonačno mnogo parova vrijednosti, već prema postavljenim uvjetima. Da bi se dobilo određeno rješenje, moraju postojati dvije jednadžbe s dvije nepoznanice, tzv. sistem jednadžbi: $a_1x + b_1y = c_1$, $a_2x + b_2y = c_2$. Riješiti takav sistem znači odrediti par brojeva x i y koji zadovoljavaju obje jednadžbe.

Rješavanje se osniva na dva teorema: ako se u zadanom sistemu jednadžbi zamijeni svaka jednadžba *ekvivalentnom* jednadžbom, dobiva se novi sistem koji je ekvivalentan zadanom; sistem $A(x, y) = 0$, $B(x, y) = 0$ ekvivalentan je sa sistemom $A(x, y) = 0$ i $mA(x, y) + nB(x, y) = 0$, gdje su m i n ma kakvi brojevi s izuzetkom $n = 0$.

Metode za rješavanje sistema

Metoda komparacije:

$$\left.\begin{array}{l|l} a_1x + b_1y = c_1 & \rightarrow\ y = \dfrac{c_1 - a_1x}{b_1} \\[2ex] a_2x + b_2y = c_2 & \rightarrow\ y = \dfrac{c_2 - a_2x}{b_2} \end{array}\right| \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{c_1 - a_1x}{b_1} = \frac{c_2 - a_2x}{b_2}$$

dobiva se jedna jednadžba sa 1 nepoznanicom i dalje rješava.

Metoda supstitucije: iz $a_1x + b_1y = c_1$ slijedi

$$y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1}$$

To se supstituira u drugu, pa se dobije

$$a_2x + b_2 \cdot \frac{c_1 - a_1x}{b_1} = c_2 \text{ itd.}$$

Metoda jednakih koeficijenata:

$$\begin{array}{l|l} a_1x + b_1y = c_1 & \cdot b_2 \rightarrow a_1b_2x + b_1b_2y = c_1b_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 & \cdot b_1 \rightarrow a_2b_1x + b_1b_2y = c_2b_1 \end{array}$$

oduzme se $(a_1b_2 - a_2b_1)\, x = c_1b_2 - b_1c_2$

odavde je $x = \dfrac{c_1b_2 - b_1c_2}{a_1b_2 - b_1a_2}$

analogno $y = \dfrac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - b_1a_2}$

Diskusija: ako je $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, jedno rješenje, sistem je određen; ako je $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ i $b_2c_1 - b_1c_2 \neq 0$, nema rješenja, sistem je nemoguć; ako je $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ i $b_2c_1 - b_1c_2 = 0$, bezbroj rješenja, sistem je neodređen.

Metoda determinanti, v. Determinanta.

Sistem više linearnih jednadžbi s više od dvije nepoznanice. Postepeno se eliminiraju nepoznanice sve dok se ne svede na sistem 2 jednadžbe s dvije nepoznanice. Da bi bio zadatak potpuno određen, mora biti zadano onoliko međusobno nezavisnih i

neprotivurječnih jednadžbi koliko ima i nepoznanica.

Sistem jedne linearne i jedne kvadratne s dvije nepoznanice: $ax + by + c = 0$ i $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$. Iz linearne se izrazi jedna nepoznanica i supstituira u kvadratnu. Dobije se jedna kvadratna po drugoj nepoznanici, itd.

Sistem dvije kvadratne s dvije nepoznanice. U općem obliku:

$$A_1x^2 + B_1xy + C_1y^2 + D_1x + E_1y + F_1 = 0$$
$$A_2x^2 + B_2xy + C_2y^2 + D_2x + E_2y + F_2 = 0$$

Metodom jednakih koeficijenata mogu se eliminirati ili članovi sa x^2 ili sa y^2, pa se dobije linearna u x ili u y. Ako se sada bilo x bilo y supstituira u jednu od zadanih jednadžbi, dobiva se općenito jednadžba 4. stepena s jednom nepoznanicom.

Jednostavniji su **slučajevi** kad je: a) *sistem linearan s obzirom na kvadrate nepoznanica;* b) *jedna je jednadžba homogena; c) u obje kvadratne jednadžbe nema linearnih članova nepoznanice;* d) *jedna od zadanih jednadžbi ima oblik:* $(ax + by)^2 + m(ax + by) = c$. U slučaju d) izvrši se supstitucija $ax + by = u$, pa se dobije linearna i kvadratna.

SISTEMI BROJEVA (BROJEVNI SISTEMI), sustavi brojeva povezanih u organsku cjelinu na određeni jedinstveni način.

Na različite se načine može označiti broj bilo govorom bilo simbolom. Razvijali su se razni sistemi. Oni se razlikuju po bazi na kojoj su građeni i po načinu kojim se iz baze tvore brojevi. Postoje dva

načina tvorbe: *aditivni* i *aditivno-multiplikativni*. Evo nekoliko sistema: *dualni* ili *binarni* (baza 2), *kvaternarni* (baza 4), *heksadni* (baza 6), *kvinarni* (baza 5), *decimalni* ili *dekadski* (baza 10), itd. Heksadni brojevni sistem tokom razvitka prešao je u *duodecimalni* kome je baza 12.

Pisanje brojeva. Znamenke (cifre, brojke). Uporedo s pismom razvili su se i pisani znakovi za označivanje brojeva. Primitivni brojevni sistemi su aditivni, npr. hijeroglifski u Egiptu. Razvijeniji je oblik aditivno-multiplikativni pisani brojevni sistem, kakav su razvili Sumerani sa znacima klinastog pisma. Rimljani su preuzeli sistem pisanja brojeva od Etruščana. Iz etruščanskih znakova Rimljani su razvili danas poznate rimske znamenke. Grci su razvili aditivni sistem upotrebljavajući kao znakove slova svog alfabeta. Poput Grka, i Slaveni su slovima svojih najstarijih pisama (glagoljice i ćirilice) dali određenu brojčanu vrijednost.

Danas se općenito u svijetu upotrebljava dekadski sistem, koji je pozicioni, aditivno-multiplikativni, ima za bazu 10 i deset znakova: 0, 1, ..., 8, 9. Razvio se najprije u Indiji; Arapi su ga prenijeli u Evropu. Upotrebom nule, koju su uveli Indijci, omogućeno je nedvojbeno i jednoznačno prikazati svaki broj.

Opći neskraćeni oblik cijelog broja s bazom B glasi: $a_n \cdot B^n + a_{n-1} \cdot B^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot B^1 + a_0 \cdot B^0$, a *skraćeni oblik:* $(a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0)_B$. Znamenke $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ moraju sve biti manje od B. Između ovih znamenki ima svega njih B različitih: 0, 1, 2,

..., $(B—1)$. *Opći neskraćeni oblik dekadskog cijelog broja* glasi: $a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$, a *skraćeni* $(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_{10}$ ili jednostavno bez oznake baze. Ima svega 10 različitih znamenki, od kojih je svaka manja od 10. *Prijelaz iz jednog sistema u drugi.* Dekadski broj N pretvara se u broj s bazom B tako da se broj N podijeli najvišom mogućom potencijom baze B, a ostatak se podijeli slijedećom nižom potencijom baze B, itd. Tako dobiveni kvocijenti zajedno s posljednjim ostatkom (koji je manji od B) jesu po redu tražene znamenke novog sistema. Taj postupak dan je relacijom $N = a_n B^n + a_{n-1} B^{n-1} + \ldots + a_1 B + a_0$, gdje je B^n najviša potencija baze B. Obratni prijelaz, tj. pretvaranje broja iz sistema s bazom B u dekadski, kazuje upravo prethodna relacija. Treba samo izvršiti naznačene operacije. Pretvaranje jednog nedekadskog sistema u drugi nedekadski obavlja se tako da se najprije pretvori u dekadski pa iz ovoga onda u drugi nedekadski.

SISTEMI MJERA, sustavi načinjeni na određeni način iz mjernih jedinica za mjerenje različitih veličina. Kao najstarije *jedinice mjere* (v. Mjerenje veličina) upotrebljavao je čovjek veličine tijela ili veličine iz svoje okoline (palac, stopa, korak, itd.). Neodređenost ovih mjera nametnula je potrebu za određivanjem jedinstvenih mjera. Tako je nastao:

Metrički (metarski) sistem mjera. Praksa je zahtijevala da se pored osnovne jedinice uvedu još i *više* i *niže* jedinice. Nazivi viših jedinica dobiju

se tako da se spred naziva osnovne jedinice stave riječi: *deka* (deset), *hekto* (sto), *kilo* (tisuća), itd., a nazivi nižih jedinica da se ispred naziva osnovne jedinice stave riječi: *deci* (deseti dio), *centi* (stoti dio), *mili* (tisući dio), itd.

Mjere za dužinu. Kao jedinica mjere za dužinu zamišljen je prvobitno četrdeset milijunti dio zemaljske meridijanske kružnice i nazvan je *metar.* Poslije je odlučeno da se stvori *normalan tip,* koji bi za sva vremena imao stalnu veličinu. Originalan tip takvog *internacionalnog metra* čuva se u Sèvresu kraj Pariza. Prema tome je 1 *metar* (1 m) jednak udaljenosti dviju crta na *prametru* od platiniridija na stalnoj temperaturi.

Više: dekametar (dam), *hektometar* (hm), *kilometar* (km). *Niže: decimetar* (dm), *centimetar* (cm), *milimetar* (mm).

Pretvornik kod mjera za dužine je 10. Pregledno:

1 km =	10 hm =	100 dam =	1000 m =	10000 dm =	
	1 hm =	10 dam =	100 m =	1000 dm =	
		1 dam =	10 m =	100 dm =	
			1 m =	10 dm =	
				1 dm =	

= 100000 cm =	1000000 mm
= 10000 cm =	100000 mm
= 1000 cm =	10000 mm
= 100 cm =	1000 mm
= 10 cm =	100 mm
= 1 cm =	10 mm

Mjere za površinu. Za jedinicu je uzet kvadrat kome je stranica 1 m, to je *kvadratni metar* (m^2).

Više: kvadratni dekametar (dam^2) = *ar* (a), *kv. hektometar* (hm^2) = *hektar* (ha), *kv. kilometar* (km^2). *Niže: kv. decimetar* (dm^2), *kv. centimetar* (cm^2), *kv. milimetar* (mm^2).

Pretvornik je 100. Pregledno:

1 km^2 = 100 ha = 10000 a = 1000000 m^2
1 ha = 100 a = 10000 m^2
1 a = 100 m^2
1 m^2 = 100 dm^2 = 10000 cm^2 = 1000000 mm^2
1 dm^2 = 100 cm^2 = 10000 mm^2
1 cm^2 = 100 mm^2

Mjere za obujam. Za jedinicu se uzima kocka koja ima brid 1 m. To je *kubični metar* (m^3).

Više: kubični dekametar (dam^3), *kub. hektometar* (hm^3), *kub. kilometar* (km^3). *Niže: kub. decimetar* (dm^3), *kub centimetar* (cm^3), *kub. milimetar* (mm^3).

Pretvornik je 1000. Pregledno:

1 km^2 = 100 ha = 1000000 dam^3 = 1000000000 m^3
1 ha = 1000000 cm^3 = 1000000000 mm^3
1 m^2 = 100 dm^2 = 1000 cm^3 = 1000000 mm^3
1 dm^2 = 1 cm^3 = 1000 mm^3

Mjere za tekućine. Jedinica je 1 *litar* (l). To je 1 dm^3.U praksi je običniji oblik valjka nego kocke.

Više: dekalitar (dal), *hektolitar* (hl). *Niže: decilitar* (dl), *centilitar* (cl), *mililitar* (ml).

Pretvornik je 10. Pregledno:

1 hl = 10 dal = 100 l = 1000 dl = 10000 cl = 100000 ml
1 l = 10 dl = 100 cl = 1000 ml
1 dl = 10 cl = 100 ml
1 cl = 10 ml

Mjere za masu (u svakidašnjoj praksi i za težinu). Osnovna jedinica je 1 *kilogram* (kg). Za jedinicu se uzima i 1 *gram* (g) = 0,001 kg.

Više od grama: *dekagram* (dkg), *hektogram* (hg), *kilogram* (kg), *metrička centa* (q), *tona* (t), *vagon*. *Niže* od grama: *decigram* (dg), *centigram* (cg), *miligram* (mg).

Pretvornik je 10. Pregledno:

1 vagon =	10 t =	100 q =	10000 kg
	1 t =	10 q =	1000 kg
		1 q =	100 kg

1 kg =	10 hg =	100 dkg =	1000 g =	10000 dg =
	1 hg =	10 dkg =	100 g =	1000 dg =
		1 dkg =	10 g =	100 dg =
			1 g =	10 dg =

= 100000 cg =	1000000 mg
= 10000 cg =	100000 mg
= 1000 cg =	10000 mg
= 100 cg =	1000 mg

Nemetarski sistem mjera.

Mjere za vrijeme. Postoje tri jedinice: *godina, dan* i *sat.* Godina je vrijeme za koje Zemlja jednom obiđe oko Sunca, a dan je vrijeme za koje se Zemlja jednom okrene oko svoje osi. Godina ima 365 dana, a prestupna 366. Godina ima 12 mjeseci. 1 dan se dijeli na 24 *sata,* 1 sat na 60 *minuta,* a 1 minuta na 60 *sekundi.* Vrijeme od 7 dana zove se *sedmica* ili *tjedan.* Vrijeme od 10 godina zove se *decenij,* od 100 godina *stoljeće,* od 1000 godina *milenij.*

Mjerenje kutova. a) *Mjerenje u stupnjevima.* Jedinica kuta je 360. dio punog kuta i zove se 1 **kutni stupanj** (1^0). Stupanj se dijeli na 60 minuta ($60'$), a minuta na 60 sekunda ($60''$); b) *Mjerenje u radijanima.* Luku kojemu je duljina jednaka polumjeru kružnice pripada određeni središnji kut. Za sve su kružnice ti središnji kutovi jednaki. Taj se kut ili pripadni luk zove 1 *radijan.* Radijan je 2π-ti dio punog kuta, pa je 2π radijana $= 360^0$; π radijana $= 180^0$; $\frac{\pi}{2}$ radijana $= 90^0$; 1 radijan $= \frac{180^0}{\pi} = 57^0\, 17'\, 44{,}806''$; c) *Mjerenje u gradima.* Jedan *grad* je stoti dio pravog kuta. Grad se dijeli na 100 *gradnih minuta,* a gradna minuta na 100 *gradnih sekundi.* Npr. piše se $28^g\, 55`\, 82`` = 28{,}5582^g$.

Prijelaz od jednih jedinica u druge. Ako je broj stupnjeva *A*, broj radijana *B*, a broj gradi *C*, tada postoji relacija: $\frac{A}{180} = \frac{B}{\pi} = \frac{C}{200}$

SKALAR, v. Vektori.

SKRAĆENI BROJEVI, v. Računanje s približnim vrijednostima.

SKRAĆENO RAČUNANJE, v. Računanje s približnim vrijednostima.

SKUPOVI (MNOŽINE), osnovni pojam koji se ne definira. Skup se sastoji od elemenata. Ako je *S* neki skup, a *x* njegov element, onda se to piše: $x \in S$ (čitaj: *x* je element skupa *S*). Dva su skupa *S*

i S_1 jednaka ako se sastoje od istih elemenata, $S = S_1$. Ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B, kaže se da je A dio skupa B. Ako pri tome skup B sadrži barem jedan element koji nije element i skupa A, piše se $A \subset B$. Ako su A i B dva skupa, tada se skup svih onih elemenata koji su i u A i u B zove *presjek* ili *zajednički dio* tih skupova. Označuje se $A \cap B$ i čita: A presjek B. *Unija* je skup koji je sastavljen od onih elemenata zadanih skupova od kojih svaki leži barem u jednom od zadanih skupova ($A \cup B$).

Opširnijom obradom skupova bavi se *teorija skupova.*

SLIČNOST, jednakost oblika geometrijskih likova. Za dva lika koji imaju isti oblik, a različite veličine, kaže se da su *slični* (znak sličnosti $\sim$). Oni imaju jednake kutove, a stranice su im razmjerne.

Slični trokuti imaju po redu jednake kutove, a odgovarajuće (homologne) stranice su razmjerne.

Poučci: dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta; ako su dvije stranice razmjerne s dvije homologne stranice drugoga, a kutovi, što ih čine stranice, jednaki; ako su po dvije stranice razmjerne, a kutovi, koji su nasuprot većim od stranica, jednaki; ako su stranice jednoga razmjerne sa stranicama drugog.

Za opsege sličnih trokuta vrijedi $o : o_1 = a : a_1 = k$. Za površine sličnih trokuta vrijedi $P : P_1 = a^2 : a^2{}_1 = = \ldots = k^2$. U pravokutnom trokutu: $v = \sqrt{pq}$ (p i q odsječci na hipotenuzi). Isto tako: $a = \sqrt{pc}$,

$b = \sqrt{qc}$ (p i q projekcije kateta a i b na hipotenuzu, *Euklidov poučak*). Odavde se dobije Pitagorin poučak: $a^2 + b^2 = c^2$

Analogno vrijedi i za *slične mnogokute.*

Perspektivna sličnost u ravnini i prostoru. Ako dva poligona jednakog broja stranica imaju takav položaj da im svaki par pridruženih vrhova leži na istom pravcu iz jednog pramena, kaže se da su u *perspektivnom položaju.* Vrh pramena zove se *središte* ili *centar (perspektivne) sličnosti.* Ako su kod dva poligona u perspektivnom položaju homologne stranice u istom smjeru, onda su kutovi jednog poligona jednaki kutovima drugoga, a homologne stranice razmjerne. Takva su dva poligona *slična,* i to *direktno perspektivno slična.* Ako su stranice paralelne, ali suprotnog smjera *(centralna simetrija),* za takve poligone se kaže da su *inverzno perspektivno slični.*

Napomena: ako je središte sličnosti beskonačno daleko, pravci pramena su međusobno usporedni, tada su poligoni *direktno sukladni,* pa se mogu *translacijom* dovesti do poklapanja. Odavde slijedi da su translacija i centralna simetrija posebni slučajevi perspektivne sličnosti.

Na perspektivnoj sličnosti osniva se umanjivanje i uvećavanje slika i likova. Ako je riječ o snopu pravaca u prostoru, dođe se do perspektivne sličnosti dvaju poliedara u prostoru. Za omjere oplošja i volumena sličnih poliedara vrijedi: $O : O_1 = k^2$, $V : V_1 = k^3$, gdje je k koeficijent sličnosti ($a : a_1$).

SLIJED, v. Niz.

SLOŽENA RAZMJERNOST, v. Razmjeri.

SLOŽENA TIJELA, obično takva tijela koja imaju barem jednu ili više *simetralnih ravnina*. Predmeti što se susreću u praksi obično su sastavljeni od dijelova koji imaju oblik geometrijskih tijela. Oplošje i volumen složenog tijela nađe se tako da se najprije razmotre sastavni dijelovi, zatim se ustanovi ima li među njima jednakih, napokon se izmjere dimenzije, pa se onda pomoću formula za površinu i volumen pojedinih dijelova nađe zajedničko oplošje i zajednički volumen, kao suma površina i volumena tih sastavnih dijelova.

SLOŽENE KAMATE, v. Kamatni račun.

SLOŽENI BROJEVI, v. Djeljivost brojeva.

SLOŽENI RAZLOMAK, v. Dijeljenje.

SPIRALA, v. Krivulja.

STATISTIKA, naučna disciplina koja se bavi kvantitativnim istraživanjima masovnih pojava, s jedne strane, a s druge tretira rezultate takvih istraživanja. Statistika je razradila metode koje se oslanjaju na teoriju vjerojatnosti. Kako individualni slučajevi pojava mogu pokazivati manja ili veća odstupanja od prosječnog ili tipičnog, potrebno je takve promatrati u velikom broju da bi se otkrilo ono što je u njima opće i što pokazuje zakonitost. Danas se statističke metode primjenjuju u najrazličitijim područjima ljudske djelatnosti.

Statistička masa, skup svih pojedinačnih slučajeva na kojima se statistički promatra neka pojava. Ovaj skup uređuje se po obilježjima (svojstvima), ili po vremenskoj ili prostornoj podjeli, i zove se *statistički niz (serija).* Razdioba mase po numeričkim obilježjima sastoji se od dva niza brojeva koji se mogu matematički obrađivati kao *empiričke funkcije.*

Statistička analiza, polazi od podataka koji se dobiju statističkim putem i nastoji raščlanjivanjem i uporeďivanjem razlika koje oni pokazuju ustvrditi tipične odnose i pravilnosti u zbivanju promatrane pojave. Da se dobije bolji uvid i pregled, podaci se sređuju po veličini, a zatim grupiraju u određene razrede određenog intervala. Broj koji pokazuje koliko se puta neko svojstvo ili obilježje pojavljuje kod članova zadanog skupa ili u određenom razredu, zove se *frekvencija* ili *učestalost.* Frekvencija svojstva x može se obilježiti sa $f(x)$. Kad se promatra cijeli statistički niz, vidi se da su svi slučajevi raspoređeni tako da svakom razredu pripada izvjesna frekvencija, zato se govori o *razdiobi* ili *distribuciji frekvencije,* koja igra važnu ulogu u statističkoj analizi. Ako se na apscisnu os nanose zadani podaci ili vrijednosti obilježja x, a na ordinatnu os pripadne frekvencije $f(x)$, dobivaju se tačke $[x; f(x)]$. Njihov skup predstavlja slikoviti prikaz frekvencije. Ako se te tačke spoje dužinama, dobiva se *poligon frekvencije.* Postoje i *krivulje frekvencije,* koje su u stvari teoretske krivulje distribucije, uz pretpostavku da su grupni intervali beskonačno mali.

Ispitivanje razdiobe frekvencije može se izvršiti u tri smjera: s obzirom na *koncentraciju;* na *disperziju;* na *oblik razdiobe* frekvencije.

Frekvencije se koncentriraju oko jedne vrijednosti, koja se zove *srednja vrijednost,* a može biti: *modus,* tj. vrijednost koja ima najveću frekvenciju; *medijana,* tj. vrijednost koja se nalazi tačno u sredini razdiobe; *aritmetička sredina,* tj.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_N}{N} = \frac{\Sigma x}{N}$$

odavde se dobije da je $\bar{x} \cdot N = \Sigma x$. Ova sredina predstavlja prosjek, ali ne govori ništa o tome kakvi su pojedini članovi. Razlika $x_i - x$ zove se *odstupanje* ili *devijacija.* Ako su $f_1, f_2, \ldots, f_N$ frekvencije pojedinih vrijednosti $x_1, x_2, \ldots, x_N$, onda je $\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots + f_N x_N}{\Sigma f} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$

Kao mjera disperzije uzima se ponajprije prosjek kvadrata odstupanja. Ta se mjera disperzije zove *varijanca:*

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{N}$$

Realnije je uzeti drugi korijen iz varijance, koji se zove *standardna devijacija;*

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (x - \bar{x})^2}{N}}$$

Ona je mjera varijabilnosti. Ako se standardna devijacija uzme u omjer prema aritmetičkoj sredini, tada se dobije relativna mjera varijacije, tzv. *koe-*

ficijent varijacije: $V = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

Oblici distribucije frekvencije mogu biti vrlo različiti. Poznavanje tih oblika izvanredno je važno za praktičan statistički rad. Kod jednih distribucija frekvencije krajnjih vrijednosti obilježja vrlo su rijetke, dok se sve ostale više zgušnjavaju bliže sredini, dok neki nizovi pokazuju visoku frekvenciju krajnjih vrijednosti, a nisku frekvenciju središnjih vrijednosti. Empiričke distribucije uspoređuju se s *teoretskim distribucijama* koje se dobivaju matematičkim putem.

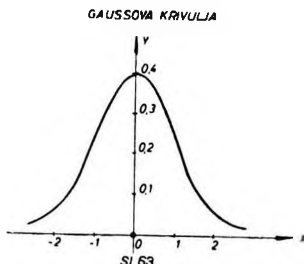
Binomna i normalna distribucija. Do *binomne distribucije* frekvencije dolazi se u vezi s razvojem binoma $(p + q)^n$, gdje je p vjerojatnost da će se neki događaj dogoditi, a q vjerojatnost da se neće dogoditi. Ako broj n pokušaja uz uvjet $p = q = \frac{1}{2}$ postaje sve veći, dolazi se do *normalne distribucije,* kojoj odgovara jedna zvonolika krivulja (sl. 63) koja se zove *Gaussova krivulja,* ili *krivulja distribucije pogrešaka,* ili *krivulja vjerojatnosti,* a ima jednadžbu

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

ili (nakon translacije koordinatnog sistema) u jednostavnijem obliku:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Normalna krivulja ima veliko značenje. Ona predočuje osnovni model tzv. *teorije uzoraka.* Na normalnoj distribuciji osniva se i *teorija pogrešaka.*



Sl 63

Dinamička analiza, bavi se određivanjem razvojne tendencije pojave izražene u obliku jedne funkcije čiji se graf zove *trend* (v. Krivulja). Vrijeme se uzima kao nezavisna varijabla (x), a veličina pojave kao zavisna varijabla (y).

Regresiona ili **korelaciona analiza,** pokazuje u kolikoj mjeri postoje među pojavama utjecaji, kao i kolika je varijacija koja potječe od raznih drugih utjecaja. Na pitanje s kolikom tačnošću tako dobivena funkcija izražava neku situaciju, odgovor daje *koeficijent korelacije* (r). Ako je r pozitivno, postoji pozitivna korelacija; ako je r negativno, i korelacija je negativna; ako je $r = 0$, smatra se da nema korelacije. Ako je $r = \pm 1$, to znači najjaču korelaciju koja se dade zamisliti.

STEREOMETRIJA, v. Geometrija.

STOŽAC (ČUNJ, KONUS, KUPA), dio prostora ili geometrijsko tijelo omeđeno stožastom plohom i ravninom provodne kružnice k. Krug koji određuje provodna kružnica k zove se *osnovka* ili *baza* stošca. Vrh V stožaste plohe je ujedno *vrh stošca*. Dio stožaste plohe od vrha do osnovke zove se *plašt stošca*. Dužina koja spaja vrh V sa središtem osnovke zove se *os stošca*. Ako je os okomita na ravninu osnovke, stožac je *uspravan*. Ako je os kosa prema osnovci, stožac je *kos*. Okomica spuštena iz vrha na osnovku zove se *visina stošca*. Spojnica bilo koje tačke na periferiji osnovke s vrhom zove se *izvodnica* ili *stranica stošca*. Ako je stožac uspravan, sve su njegove stranice jednake i čine jednake priklone kutove prema osnovci. Ako se plašt uspravnog stošca presiječe uzduž jedne stranice i razvije u ravninu, dobije se kružni isječak (v. Kružnica). Uspravan stožac kojem su stranice jednake promjeru osnovke zove se *jednakostraničan stožac*.

Presjek stošca ravninom kroz os zove se *osni presjek*. Svi osni presjeci uspravnog stošca sukladni su jednakokračni trokuti. Osni presjek kosog stošca općenito je raznostraničan trokut. Ako je okomit na ravninu osnovke, zove se *karakterističan presjek*. Stranice karakterističnog presjeka određuju najveću i najmanju stranicu.

Krnji stožac je dio stošca između osnovke i s njom paralelnog presjeka. Krnji stožac je omeđen sa dva nejednaka kruga *(osnovke)* i dijelom stožaste plohe *(plašt)*. Spojnica središta gornje i donje osnovke je *os*, a udaljenost između osnovki je *visina* krnjeg

stošca. Osni presjeci uspravnog krnjeg stošca sukladni su jednakokračni trapezi, dok su kod kosoga općenito trapezi. Osni presjek koji je okomit na ravninu osnovke zove se karakterističan presjek.

Formule za *oplošje* i *obujam*, v. Oplošje; Obujam.

STOŽASTA PLOHA, v. Plohe; Analitička geometrija.

STROFOIDA, v. Krivulja.

SUBDETERMINANTA, v. Determinanta.

SUKLADNOST, jednakost veličina i oblika likova. Znak sukladnosti je $\cong$, tj. jednako i slično. Pridruženi vrhovi, stranice i kutovi zovu se *homologni*. Sukladni trokuti moraju se podudarati u sve tri stranice i u sva tri kuta.

Poučci: dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz tu stranicu (v. Geom. konstrukcije — prva konstrukcija trokuta); dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu među njima (druga konstrukcija); dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u dvije stranice i kutu nasuprot većoj od tih stranica (treća konstrukcija); dva su trokuta sukladna ako se podudaraju u sve tri stranice (četvrta konstrukcija — uvjet je samo da je $b - c < a < b + c$, itd.

Dva trokuta koja se podudaraju u sva tri kuta ne moraju biti sukladna (v. Sličnost).

SUKUTI, v. Kut.

SUMA, v. Zbrajanje.

SUMA ARITMETIČKE PROGRESIJE, v. Niz.

SUMA BESKONAČNOG GEOMETRIJSKOG REDA, v. Redovi.

SUMA GEOMETRIJSKE PROGRESIJE, v. Niz.

SUMA REDA, v. Redovi.

SUMAND, v. Zbrajanje.

SUMIRANJE, v. Zbrajanje.

SUMJERLJIVE VELIČINE, dvije veličine u kojima se neka veličina nalazi cio broj puta. Prema tome je njihov omjer jednak omjeru dvaju cijelih brojeva. Za dvije veličine koje se ne mogu izmjeriti nikakvom zajedničkom mjerom, tako da bi se ona u obje zadane veličine nalazila bez ostatka cio broj puta, kaže se da su bez zajedničke mjere ili da su *nesumjerljive.* Npr. dijagonala i stranica kvadrata nesumjerljive su veličine.

Svaki broj koji se dobije kao vrijednost omjera dviju sumjerljivih veličina, a time i kao kvocijent dvaju cijelih brojeva, zove se *racionalan broj.* Svaki broj koji se dobije kao omjer dviju nesumjerljivih veličina zove se *iracionalan broj* (v. Područja brojeva).

SUPLEMENTNI KUTOVI, v. Kut.

SUPSTITUCIJA, v. Opći brojevi.

SUPTRAHEND, v. Oduzimanje.

Š

ŠESTAR, v. Geometrijsko crtanje.

ŠESTICA, naziv za brojku 6 ili za broj 6. Upotrebljava se pri numeriranju predmeta.

T

TABLICA MNOŽENJA, v. Jedanputjedan.

TABLICE, v. Funkcija.

TAČKA, v. Geometrijski elementi.

TAČKA INFLEKSIJE, tačka na krivulji u kojoj se mijenja predznak zakrivljenosti, a u toj tački je jednaka nuli. Tangenta povučena u tački infleksije ujedno presijeca krivulju. Na mjestu infleksije je $y'' = 0$, dok je $y''' \neq 0$. Krivulja ima tačku infleksije i onda ako je prva $(n$-1)-va derivacija jednaka nuli, a $y^{(n)} \neq 0$, uz uvjet da je n neparan broj.

TAČNOST NEPOTPUNOG BROJA, v. Računanje s približnim vrijednostima.

TANGENCIJALNI ČETVEROKUT, četverokut kome stranice leže na tangentama iste kružnice. U tangencijalnom četverokutu u kome se može upisati kružnica, zbroj dviju nasuprotnih stranica jednak je zbroju drugih dviju nasuprotnih stranica. Vrijedi i obrat.

Postoji i tangencijalni četverokut s pripisanom kružnicom.

TANGENS, v. Trigonometrija.

TANGENTA, v. Diferencijalni račun; Kružnica; Elipsa; Hiperbola; Parabola.

TARA, ono što se odbija od cjelokupne težine. To može biti težina omota, težina praznih vreća, sanduka, buradi, itd. Tara = bruto — neto.

TEOREM, v. Poučak.

TERENSKO MJERENJE (MJERENJE NA TERENU), mjerenje dužina (razdaljina, visina, i dr.), kutova, površina na terenu, tj. na dijelovima površine Zemlje. Za takvo mjerenje potreban je izvjestan pribor i neki jednostavni aparati.

Pribor: kočići ili *šiljci; letve, značke* ili *trasirke; uže, konopac* i *mjernička mjerila; mjernički sto* na tronogu.

Aparati: umjesto *teodolita* može se uzeti ravnalo uzduž kojega će se vizirati; na jedan njegov kraj pričvrsti se kutomjer, a u središtu kutomjera objesi visak. Služi za mjerenje kutova u vertikalnoj ravnini. Za mjerenje kutova u horizontalnoj ravnini načini se od kartona ili od tanke daščice tzv. *diopter,* na čijim su krajevima zabodene dvije igle preko kojih se vizira. Za trasiranje okomica služi *eker,* sastavljen od dvije okomite letvice na čijim su krajevima pobodeni šiljci preko kojih se vizira.

Za snalaženje na terenu treba prije svega odrediti četiri strane svijeta, tj. *orijentirati se.* To se postiže pomoću *kompasa* ili *busole.* (v. Školski leksikon: Zemljopis.) Nakon orijentacije na zemljištu treba orijentirati kartu, što se obavlja pomoću pravca

sjever-jug. Kada je karta orijentirana, odredi se *stajalište,* tj. tačka na terenu u kojoj se stoji, pa je valja naći na karti.

Jednostavniji slučajevi: *trasiranje, mjerenje dužina, mjerenje kutova* i *snimanje pojedinih likova,* gdje snimiti lik znači odrediti mjerne brojeve svih njegovih osnovnih elemenata i nacrtati ga u *umanjenom mjerilu.* To je *plan.* Osim planova neophodnih za razne tehničke radove važni su također *geografski planovi* ili *karte.*

Za rješavanje složenijih zadataka valja: pripremiti plan; izvoditi radove na terenu; razmatrati dobivene rezultate i crtati likove u umanjenom mjerilu.

TETIVA, v. Kružnica.

TETIVNI ČETVEROKUT, četverokut kojemu su svi vrhovi na istoj kružnici, ili kome su stranice tetive iste kružnice. U tetivnom četverokutu suprotni su nutarnji kutovi suplementni. Može mu se opisati kružnica. U svakom tetivnom četverokutu umnožak dijagonala jednak je zbroju umnožaka dviju i dviju suprotnih stranica. To je *Ptolemejev poučak.*

Napomena: iz ovoga poučka izlazi kao specijalan slučaj Pitagorin poučak, kad se uzme da je tetivni četverokut pravokutnik.

TETRAEDAR, v. Poliedar.

TISUĆA, viša dekadska jedinica, tj. $10^3 = 1000$.

TONA, viša jedinica za mjerenje mase, 1000 kg, obilježava se sa **t** (v. Sistemi mjera).

TRAKTRIKS, v. Krivulja.

TRANSFORMACIJA KOORDINATA, prijelaz od jednih koordinata na druge. Može biti:

Translacija, ako se pomakne os x staroga sistema paralelno u novi položaj X, i to za dužinu n, a os y u novi položaj Y za dužinu m, onda novo ishodište O', prema starom sistemu ima koordinate (m; n). Tačka P (x; y) bit će u novom sistemu P (X; Y). Za transformaciju koordinata staroga sistema u novi vrijede relacije: $x = X + m$ i $y = Y + n$, a za obrnuti prijelaz: $X = x - m$ i $Y = y - n$.

Rotacija, zakretanje koordinatnog sistema oko ishodišta O danoga sistema (xy) za kut α u novi položaj osi (XY). Transformacione jednadžbe glase: $x = X \cos\alpha - Y \sin\alpha$ i $y = X \sin\alpha + Y \cos\alpha$.

Ako se provede translacija i rotacija zajedno, onda je: $x = m + X \cos\alpha - Y \sin\alpha$, $y = n + X \sin\alpha + Y \cos\alpha$.

Za prijelaz iz pravokutnog sistema (xy) u polarni, za koji je pol u ishodištu O, a polarna os u osi x tog sistema, i ako su polarne koordinate r i φ, glase transformacione jednadžbe: $x = r \cos\varphi$, $y = r \sin\varphi$. Za prijelaz iz polarnih u pravokutne: $r = \sqrt{x^2 + y^2}$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}, \quad \cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}$$

TRANSLACIJA, gibanje gdje se sve tačke gibaju po paralelama prevaljujući jednake dužine. To je *paralelno pomicanje*. Translatirati tačku A za *usmjerenu dužinu* ili *vektor* $\overrightarrow{XY}$ znači tački A pridružiti tačku A_t tako da se vektor $\overrightarrow{XY}$ nanese od

tačke A po smjeru i veličini, i da se odredi tačka A_t u koju dolazi tačka Y vektora $\overrightarrow{XY}$. Dužina AA_t je *trag*. Translacija geometrijskog lika S za vektor $\overrightarrow{XY}$ je pomak svih tačaka skupa S za zadani vektor. Translacijom se prevodi pravac p u pravac p_t koji je istovetan sa p ili je usporedan sa p, već prema tome da li je vektor usporedan ili nije usporedan s pravcem p. Translacijom se svaki kut preslikava u jednaki kut s usporednim kracima istog smjera.

Translacija ravnine Π za vektor $\overrightarrow{XY}$ prevodi u ravninu Π_t, koja je istovetna ili paralelna sa Π, već prema tome da li je vektor usporedan ili nije usporedan s ravninom Π. Translacijom za neki vektor svaki geometrijski lik S se preslikava u sukladan lik S_t.

TRANSVERZALA, v. Kut.

TRAPEZ, četverokut koji ima par usporednih stranica. Paralelne stranice zovu se *osnovice* ili *baze*, a druge dvije stranice zovu se *kraci*. Udaljenost između osnovica zove se *visina* trapeza. Spojnica polovišta krakova trapeza zove se *srednjica*. Ona je usporedna s osnovicama i jednaka je polovini njihovog zbroja.

Ako su kraci trapeza međusobno jednaki i neparalelni, zove se *jednakokračan trapez*. Kutovi uz svaku osnovicu jednakokračnog trapeza su jednaki. Jednakokračan trapez ima jednake dijagonale i osno simetričan je lik. Njegova je os simetrije zajednička simetrala obiju njegovih osnovica. Jednakokračnom trapezu može se opisati kružnica.

Trapez je jednoznačno određen sa 4 nezavisna elementa. Na tome se osnivaju konstrukcije trapeza (v. Geometrijske konstrukcije). Jednakokračan trapez je jednoznačno određen sa 3 nezavisna elementa.

Opseg i *površina* trapeza, v. Opseg; Površina likova.

TRAPEZOID, v. Četverokut.

TRASIRANJE, v. Terensko mjerenje.

TRIEDAR (TROBRID), v. Prostorni ugao.

TRIGONOMETRIJA, dio geometrije koji rješava geometrijske zadatke računskim putem pomoću funkcija kuta. Glavni je zadatak trigonometrije rješavanje trokuta. Dio trigonometrije koji se bavi proučavanjem tih funkcija (jer je riječ o kutovima) često se naziva *goniometrija.*

Trigonometrijske funkcije šiljastih kutova definirane su u pravokutnom trokutu (a nasuprotna kateta, b kateta uz kut, c hipotenuza).

Omjer $\frac{a}{c}$ zove se sinus, tj. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

„ $\frac{b}{c}$ „ „ kosinus, „ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

„ $\frac{a}{b}$ „ „ tangens, „ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

„ $\frac{b}{a}$ „ „ kotangens, „ $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

Postoje još i sekans i kosekans, ali se manje upotrebljavaju. Ovi omjeri ovise samo o veličini kuta, pa su to funkcije kuta i stoga se zovu *trigonometrijske* ili *goniometrijske funkcije.*

Trigonometrijske funkcije komplementnih kutova:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta = \cos(90^0 - \alpha)$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta = \sin(90^0 - \alpha)$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b} = \mathrm{ctg}\,\beta = \mathrm{ctg}(90^0 - \alpha)$$

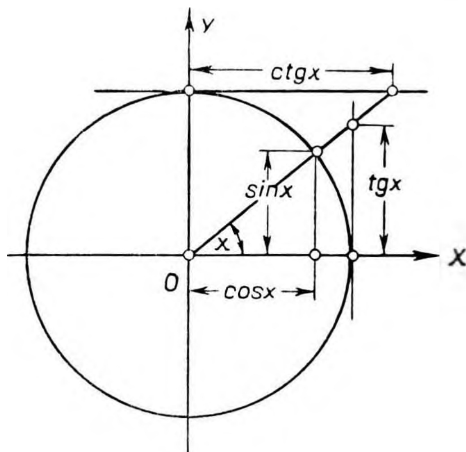
$$\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a} = \mathrm{tg}\,\beta = \mathrm{tg}(90^0 - \alpha)$$

Vrijednosti trigonometrijskin funkcija za neke kutove:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
0^0	0	1	0	∞
30^0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$
45^0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
60^0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
90^0	1	0	∞	0

Napomena: vrijednosti trigonometrijskih funkcija za ma koji kut nalaze se u trigonometrijskim tablicama prirodnih vrijednosti.

Opća definicija trigonometrijskih funkcija dobije se na tzv. *trigonometrijskoj kružnici* (središte u ishodištu, $r = 1$). Ma kojem broju x pripada posve određena tačka trigonometrijske kružnice (sl. 64). Kosinus broja x jeste *apscisa,* sinus je *ordinata,* tangens je *segment* na tangenti u tački (1; 0), a kotangens je *segment* na tangenti u tački (0; 1). Ove definicije vrijede za tačku ma gdje na kružnici.



Sl. 64

Predznaci trigonometrijskih funkcija u pojedinim kvadrantima:

Kvadrant	I	II	III	IV
sinus	+	+	—	—
kosinus	+	—	—	+
tangens	+	—	+	—
kotangens	+	—	+	—

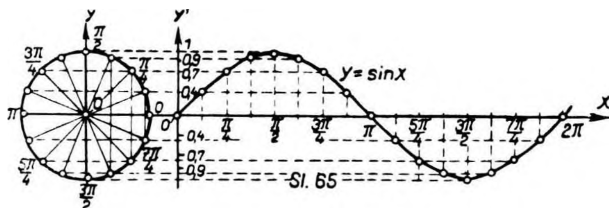
Formule svođenja na prvi kvadrant ($0^0 < x < 90^0$):

kut	sin	cos	tg	ctg	
$-x$	$-\sin x$	$+\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	
$90^0 - x$	$+\cos x$	$+\sin x$	$+\operatorname{ctg} x$	$+\operatorname{tg} x$	I kvadrant
$90^0 + x$	$+\cos x$	$-\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	II kvadrant
$180^0 - x$	$+\sin x$	$-\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	
$180^0 + x$	$-\sin x$	$-\cos x$	$+\operatorname{tg} x$	$+\operatorname{ctg} x$	III kvadrant
$270^0 - x$	$-\cos x$	$-\sin x$	$+\operatorname{ctg} x$	$+\operatorname{tg} x$	
$270^0 + x$	$-\cos x$	$+\sin x$	$-\operatorname{ctg} x$	$-\operatorname{tg} x$	IV kvadrant
$360^0 - x$	$-\sin x$	$+\cos x$	$-\operatorname{tg} x$	$-\operatorname{ctg} x$	
$x + n \cdot 360^0$	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$	

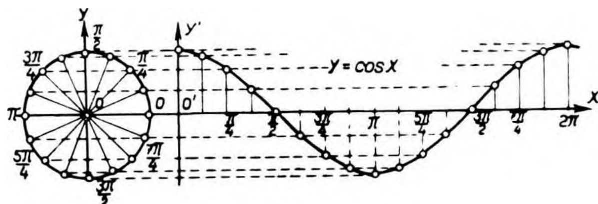
Kako je općenito, bio k ma kakav cio broj, $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$, $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x + k\pi) = \operatorname{ctg} x$, kaže se da su sinus i kosinus periodične funkcije s periodom 2π, a tangens i kotangens periodične funkcije s periodom π.

Grafovi. Tok funkcija može se najbolje razabrati iz njihovih grafova:

sinusoida $y = \sin x$ (sl. 65)

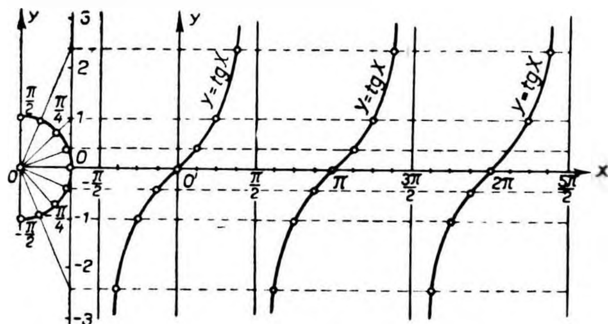


kosinusoida $y = \cos x$ (sl. 66)



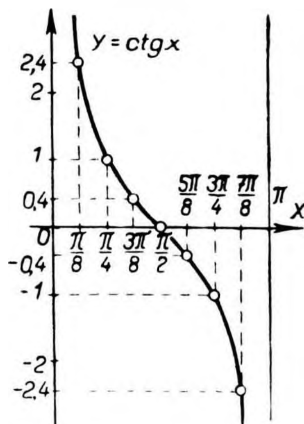
Sl. 66

tangensoida $y = \operatorname{tg} x$ (sl. 67)



Sl. 67

kotangensoida $y = \operatorname{ctg} x$ (sl. 68)



Sl. 68

Osnovne relacije: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x} = \frac{\sin x}{\cos x}$; $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}$;

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1; \quad 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Svaka funkcija dade se izraziti svakom drugom. Pregledno u tablici:

traži se	zadano			
	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$\sin x$	—	$\pm\sqrt{1-\cos^2 x}$	$\frac{\operatorname{tg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$
$\cos x$	$\pm\sqrt{1-\sin^2 x}$	—	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}$	$\frac{\operatorname{ctg} x}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}{\cos x}$	—	$\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}$	$\frac{\cos x}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	—

Napomena: izbor predznaka zavisi od toga u kome kvadrantu leži kut.

Funkcije zbroja i razlike kutova (adicioni teoremi):

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \cdot \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} y \pm \operatorname{ctg} x}$$

Funkcije dvostrukog kuta:

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \cdot \operatorname{ctg} x}$$

Funkcije polovine kuta:

$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} - 1}{2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}; \ \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}; \ 1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}; \ \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$$

Pretvaranje zbroja ili razlike u umnožak (transformacija za logaritmiranje):

1. $\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$

2. $\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$

3. $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x + y}{2} \cos \frac{x - y}{2}$

4. $\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x + y}{2} \sin \frac{x - y}{2}$

$$5.\ \operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x \pm y)}{\cos x \cdot \cos y}$$

$$6.\ \operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y = \pm \frac{\sin(x \pm y)}{\sin x \cdot \sin y}$$

Trigonometrijske jednadžbe, v. Jednadžba.

Ravna trigonometrija, odnosi se na trokut u ravnini, za razliku od sferne trigonometrije koja se odnosi na sferni trokut (v. Sferna trigonometrija). R. t. bavi se odnosima između stranica i kutova trokuta, pri čemu se upotrebljavaju trigonometrijske relacije i poučci, tako da se svi zadaci o trokutu rješavaju računom.

Pravokutan trokut. Ako su a i b katete, a c hipohipotenuza, onda se dobije:

$$a = c \cdot \sin\alpha = c \cdot \cos\beta$$
$$b = c \cdot \sin\beta = c \cdot \cos\alpha$$
$$a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha = b \cdot \operatorname{ctg}\beta$$
$$b = a \cdot \operatorname{tg}\beta = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha$$
$$c = \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a}{\cos\beta} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{b}{\cos\alpha}$$

Kosokutan trokut:

Poučak o sinusima: $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$, tj. $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$, $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$, $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$. Važan je i ovaj način pisanja: $a : \sin\alpha = b : \sin\beta = c : \sin\gamma = 2r$ (r je polumjer trokutu opisane kružnice).

Poučak o kosinusima (ili **Carnotov poučak**):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2\,ca\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab\cos\gamma$$

Napomena: za $\gamma = 90^0$ dobije se Pitagorin poučak:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Poučak o tangensima:

$(a + b) : (a - b) = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha + \beta}{2} : \operatorname{tg}\dfrac{\alpha - \beta}{2}$. Analogno i za druge stranice.

Heronovske formule:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s\,(s-a)}{bc}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}$$

gdje je $2\,s = a + b + c$. Cikličkom zamjenom dobiju se analogne formule.

Postoje i ove formule:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}\,;\quad \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{s-b}\,;\quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c}\,,$$

gdje je $\varrho = \dfrac{\sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}}{s}$ = polumjer upisane kružnice.

Formule za površinu:

$$P = \frac{bc}{2}\sin\alpha\,;\qquad P = \frac{b^2\sin\alpha\sin\gamma}{2\sin\beta}$$

$$P = \varrho^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2};$$

$$P = s^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

$$P = s(s - a) \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad ; \quad P = 2r^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

i druge koje se dobiju cikličkom izmjenom.

Napomena: trigonometrija se mnogo primjenjuje u planimetriji, stereometriji i u mnogim drugim područjima (geodezija, matematička geografija, fizika i tehnika, i dr.).

TRINOM, v. Opći brojevi.

TRISEKCIJA KUTA, dijeljenje kuta na tri jednaka dijela (v. Geometrijske konstrukcije).

TROBRID, v. Prostorni ugao.

TROJKA, naziv za znamenku 3 ili za broj 3, upotrijebljen pri numeriranju nekih predmeta, ili uzet kao ekvivalent nekom pojmu, npr. trojka — kao broj tramvaja, ili trojka — ocjena dobar. Trojka znači i tropreg.

TROKUT, ravan zatvoren geometrijski lik omeđen sa tri dužine *(stranice)*. Zajedničke tačke po dviju stranica zovu se *vrhovi*. Po dvije stranice zatvaraju jedan *unutrašnji kut*. *Vanjski kut* je sukut unutrašnjeg kuta. Stranice čine obod trokuta. Duljina oboda je *opseg*. Stranice i kutovi zovu se *osnovni elementi trokuta.*

Vrste trokuta: a) po kutovima: 1. *šiljastokutan;* 2. *pravokutan; 3. tupokutan.* b) po stranicama: 1.

raznostraničan; 2. *istokračan* ili *jednakokračan;* 3. *istostraničan* ili *jednakostraničan.* U pravokutnom trokutu stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se *katete,* a najveća stranica *hipotenuza.* U jednakokračnom trokutu jednake stranice zovu se *kraci,* a treća stranica *baza* ili *osnovica.*

Zbroj (unutrašnjih) kutova u trokutu iznosi 180°. Vanjski kut trokuta jednak je zbroju dvaju unutrašnjih kutova koji s njim nemaju zajednički vrh. Zbroj vanjskih kutova iznosi 360°. U trokutu je svaka stranica manja od zbroja ostalih dviju stranica, a veća od njihove razlike. U svakom jednakokračnom trokutu kutovi uz osnovicu (koji leže nasuprot jednakim kracima) međusobno su jednaki. U jednakostraničnom trokutu kutovi su jednaki i iznose po 60°. U svakom trokutu nasuprot većoj stranici leži veći kut, nasuprot jednakim stranicama leže jednaki kutovi. Vrijedi i obratno. Ako se od središta jedne stranice trokuta povuče do druge stranice dužina koja je usporedna s trećom stranicom, dobiva se *srednjica trokuta.* Njena je duljina jednaka polovini duljine treće stranice. O simetralama stranica kao i o simetralama kutova trokuta v. Simetrija.

Četiri karakteristične tačke trokuta: sjecište simetrala stranica; *sjecište simetrala kutova; sjecište visina (ortocentar),* a visina trokuta je okomica spuštena iz vrha na suprotnu stranicu; *sjecište težišnica.* Dužina koja ide od vrha trokuta do sredine suprotne stranice zove se težišnica. Sve tri težišnice sijeku se u jednoj tački koja se zove *težište (bari-*

centar). Težište je udaljeno od svakog vrha za $\frac{2}{3}$ duljine težišnice koja prolazi tim vrhom. Sjecište simetrala stranica je središte opisane kružnice trokutu. Sjecište simetrala kuta je središte upisane kružnice trokutu.

Izračunavanje *opsega* i *površine trokuta,* v. Opseg; Površine likova; Trigonometrija.

U

UDALJENOST TAČKE OD PRAVCA, mjeri se po okomici spuštenoj iz te tačke do nožišta na pravcu. To je najkraća spojnica od tačke do pravca. Svaka druga dužina povučena iz tačke do bilo koje druge tačke na pravcu zove se *kosa dužina.* Od dviju kosih dužina između tačke i pravca veća je ona kojoj je nožište dalje od nožišta okomice. Vrijedi i obrnuto.

UDALJENOST TAČKE OD RAVNINE, najkraća dužina koja se može povući od tačke do ravnine. Mjeri se po okomici spuštenoj od te tačke do nožišta u toj ravnini. Od tačke izvan ravnine može se do te ravnine povući beskonačno mnogo kosih dužina kojima su sve projekcije međusobno jednake. Nožišta svih tih jednakih kosih dužina leže na jednoj kružnici.

UGAO, v. Kut.

UKRŠTENI PRAVCI, v. Geometrijski elementi.

UMANJENO MJERILO, dužina izmjerena nekom jedinicom a nacrtana u nekim drugim jedinicama.

Npr. dužina mjerena u metrima crta se kao dužina izražena u centimetrima. Napisat će se na slici 1 : 100 (jedan prema sto), što znači da jedinica na slici iznosi sto takvih jedinica u stvarnosti. Umanjena mjerila naročito se upotrebljavaju pri crtanju npr. geografskih karata ili planova.

UMNOŽAK, v. Množenje.

UPRAVNO RAZMJERNE VELIČINE, v. Omjeri.

USPOREDNOST, v. Geometrijski elementi.

USPRAVAN (VERTIKALAN), v. Geometrijski elementi.

UVEĆAVANJE i UMANJIVANJE LIKOVA, postupak zasnovan na crtanju sličnih likova (v. Sličnost). Velika primjena u praksi. Koristi se na svim područjima ljudske djelatnosti. Izrada svakoga, pa i najjednostavnijeg predmeta, traži sliku, i to *uvećanu,* ako je predmet malen, a *umanjenu,* ako je velik.

V

VALJAK, dio prostora omeđen valjkastom plohom (v. Plohe) i dvjema ravninama paralelnim s ravninom kružnice provodnice. Dvije paralelne ravnine sijeku valjkastu plohu u dvije jednake kružnice, koje omeđuju dva sukladna kruga: *osnovke* ili *baze*. Dio valjkaste plohe koji omeđuje valjak zove se *plašt*. Dijelovi izvodnica valjkaste plohe na plaštu zovu se *izvodnice* ili *stranice* valjka. Sve izvodnice valjka među sobom su jednake. Ako su izvodnice okomite na osnovkama, valjak je *uspravan;* ako su izvodnice kose prema osnovkama, valjak je *kos*. Udaljenost između osnovaka zove se *visina* valjka.

Spojnica središta baza zove se *os* valjka. Ako se valjak prereže ravninom kroz os, dobiju se dijelovi koji se zovu *poluvaljci,* a presjek se zove *osni presjek*. Osni presjeci su sukladni pravokutnici kod uspravnog, a nejednaki paralelogrami kod kosog valjka. Osni presjek kosog valjka kome je ravnina okomita na ravnini osnovke, zove se *karakteristični paralelogram* kosog valjka. Ako je izvodnica usprav-

nog valjka jednaka promjeru baze ($v = 2r$), tj. osni presjek je kvadrat, dobiva se *jednakostraničan valjak.*

Valjak može nastati i tako da krug izvodi translaciju uzduž jednog pravca koji ne leži u ravnini kruga. Zato se i zove *kružni valjak* ili *cilindar. Uspravni kružni valjak* može nastati i tako da se pravokutnik zavrti oko jedne svoje stranice koja se tada zove *os rotacije.* Zato se kaže: valjak je *rotaciono tijelo.*

Oplošje i *volumen valjka,* v. Oplošje; Obujam.

VEKTORI, veličine koje su određene osim dužinom još i smjerom u prostoru. Zovu se i *vektorske veličine.* Veličine čije vrijednosti mogu biti izražene pozitivnim ili negativnim brojem zovu se *skalarne veličine* ili *skalari.*

Vektor je orijentirana dužina, koja ima određenu duljinu i smjer, a označuje se ili $\overrightarrow{AB}$ (gdje je A početak, a B kraj) ili $\vec{a}$. Duljina vektora $\vec{a}$, tzv. *modul* ili *apsolutna veličina,* označuje se sa a ili $|\vec{a}|$. Pravac na kojem leži vektor zove se *nosilac. Nul-vektor* ($\vec{0}$) je vektor kome se podudara početak i kraj. Njegov je modul jednak nuli, a smjer je neodređen.

Dva vektora se smatraju *jednakima* ili *ekvipolentnima* ako su im jednaki moduli, a smjerovi im se podudaraju, tj. paralelni vektori orijentirani u

istom smjeru. Po toj definiciji vektor se ne mijenja ako se pomakne paralelno samom sebi, a početna tačka padne u bilo koju tačku prostora. To su *slobodni vektori.* Ako se početak može prenijeti samo u tačku koja leži na pravcu u smjeru vektora, to su *klizni vektori. Kolinearni vektori* su paralelni jednom te istom pravcu. *Komplanarni vektori* su paralelni jednoj te istoj ravnini. Uzajamno *suprotni vektori* su jednaki po duljini, a suprotnih smjerova, tj. $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ i $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$.

Jedinični vektori su oni kojima je modul jednak 1. Jedinični vektor kome se smjer podudara sa smjerom vektora $\vec{a}$ obilježava se sa $\vec{a}^0$, i zove se *ortom* njegovog smjera. Svaki vektor $\vec{a}$ može se predočiti u obliku $\vec{a} = a \cdot \vec{a}^0$, gdje je a modul vektora $\vec{a}$. Orti koji imaju smjerove pravokutnih osi Ox, Oy, Oz označuju se sa $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$ ili $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Radijus-vektor tačke T je vektor kome se početak podudara s ishodištem ili s kojom drugom istaknutom tačkom, a kraj se nalazi u toj tački. Obično se obilježava sa $\vec{r}$. Početak se tada zove *pol* vektora. Katkad se (npr. kod definicije čunjosječnica) umjesto »modul radijus-vektora« kraće kaže »radijus-vektor«.

Općenito se svaki vektor $\vec{a}$ u prostoru može na jedan jedini način rastaviti u sumu vektora para-

lelnih ortima, tj. $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$; skalari a_x, a_y, a_z zovu se pravokutne Descartesove koordinate vektora $\vec{a}$ u sistemu $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$.

Operacije s vektorima, zatim primjena vektora (važno u *teoriji polja),* i dr. uči se u općoj *teoriji vektora* ili *vektorskom računu.*

VEKTORSKA FUNKCIJA, v. Funkcija.

VERTIKALAN *(USPRAVAN),* v. Geometrijski elementi.

VIDNI KUT, v. Kut.

VISAK, nit na jednom kraju opterećena nekim predmetom (u obliku kugle, valjka i sl.). Upotrebljava se za određivanje vertikalnog položaja pravca i ravnine. Pravac je u vertikalnom položaju ako ima položaj kao nit mirnog viska.

VIŠEIMENOVANI BROJEVI, brojevi izraženi s više imenovanih brojeva iste vrste. Imenovani broj je onaj koji osim množine jedinica naznačuje i vrstu jedinica.

Pretvaranje. Višeimenovani brojevi mogu se pretvoriti u jednoimenovane tako da se izraze samo u jedinicama iste vrste. I obrnuto, jednoimenovani mogu se pretvoriti u višeimenovane ako u jednoimenovanom broju ima sadržana koja viša jedinica. Pretvaranje viših u niže zove se *resolviranje,* a nižih u više *reduciranje.* Broj koji kaže koliko viša jedinica sadrži nižih jedinica zove se *pretvornik* ili *redukcioni broj.* Da se izvrši resolviranje treba više

jedinice pretvoriti u niže, a to se postiže tako da se pomnože pretvornikom. Da se niže pretvore u više, valja ih podijeliti pretvornikom.

Zbrajanje višeimenovanih brojeva obavlja se tako da se iste jedinice potpisuju jedne ispod drugih i zbrajaju. Ako je zbroj nekih jedinica veći od pripadnog pretvornika, reducira ih se na neposredno višu jedinicu.

Oduzimanje višeimenovanih brojeva obavlja se kao i oduzimanje višeznamenkastih brojeva. Počinje se oduzimanje od najnižih jedinica, oduzimajući samo one koje su istoimene. Ako je minuend nekih jedinica manji od suptrahenda, onda se uzima jedna od neposredno viših jedinica i pretvori u dotične niže jedinice. Dodavši ih nižim jedinicama, izvrši se oduzimanje.

Množenje višeimenovanih brojeva. Višeimenovani broj množi se neimenovanim brojem tako da se pomnože njime jedinice svake vrste, počinjući od najnižih, a na kraju se produkti, gdje je to moguće, reduciraju. Može se raditi i tako da se višeimenovani broj pretvori u jednoimenovani, pa se nakon izvršenog množenja dobiveni jednoimenovani produkt reducira.

Dijeljenje višeimenovanih brojeva neimenovanim *(dioba)* obavlja se najjednostavnije tako da se višeimenovani broj pretvori u jednoimenovani, zatim se izvrši dijeljenje, i na kraju rezultat izrazi u obliku višeimenovanog broja. Kvocijent je imenovan broj. Ako treba podijeliti višeimenovani višeimenovanim *(mjerenje)*, onda se oba broja pretvore u

jednoimenovane i tada se izvrši dijeljenje tih jednoimenovanih brojeva kao cijelih brojeva. Kvocijent je neimenovan broj.

VIŠEKUTI, v. Mnogokut.

VJEROJATNOST, v. Račun vjerojatnosti.

VODORAVAN (HORIZONTALAN), v. Geometrijski elementi.

VOLUMEN, v. Obujam.

VRHOVI, tačke u kojima se kod tijela sastaju više od dvije plohe ili bridovi, a kod ravnih likova po dvije susjedne stranice lika.

VRŠNI KUT, v. Kut.

Z

ZAGRADE, v. Brojevni izraz.

ZAKON ASOCIJACIJE, v. Opći brojevi.

ZAKON DISTRIBUCIJE, v. Opći brojevi.

ZAKON KOMUTACIJE, v. Opći brojevi.

ZBRAJANJE (SABIRANJE, SUMIRANJE, ADICIJA), prva osnovna računska radnja (operacija). Adicija se simbolički označuje znakom + *(plus, više).* Brojevi koji se zbrajaju zovu se *pribrojnici (sumandi* ili *adendi),* a broj koji se dobiva kao rezultat zove se *zbroj* ili *suma.* Pri zbrajanju vrijedi: *zakon komutacije* (zamjene), koji kaže da je suma nezavisna od reda kojim se zbrajaju pribrojnici, npr. $a + b + c + d = c + d + b + a$; *zakon asocijacije* (udruživanja), koji kaže da se zbroj ne mijenja ako se pribrojnici zbrajaju u bilo kojim grupama, npr. $a + (b + c) = (a + b) + c$

Zbrajanje cijelih brojeva. Zbrajati cijele brojeve znači odrediti broj koji ima toliko jedinica koliko imaju dva ili više brojeva zajedno. Broj se ne mijenja ako mu se pribroji nula, ili ako se on pribroji

nuli. Na osnovi zakona komutacije i asocijacije slijedi postupak zbrajanja cijelih brojeva. Npr. 325 + + 531 = (3S + 2D + 5J) + (5S + 3D + 1J) = = (3S + 5S) + (2D + 3D) + (5J + 1J) = 8S + + 5D + 6J = 856. Ili kraće:

$$\begin{array}{r} 325 \\ +\ 531 \\ \hline 856 \end{array}$$

Zbrajanje decimalnih brojeva. Pri zbrajanju decimalnih brojeva potpisuju se jedinice istih mjesnih vrijednosti jedne ispod drugih i zbrajaju se kao cijeli brojevi, vodeći računa da se iza jedinica i u svim pribrojnicima i u rezultatu piše decimalni zarez.

Zbrajanje »algebarskih« brojeva. »Algebarski« brojevi jednakih predznaka zbrajaju se tako da se zbroju njihovih apsolutnih vrijednosti daje zajednički predznak. »Algebarski« brojevi različitih predznaka zbrajaju se tako da se od veće apsolutne vrijednosti oduzme manja i toj razlici dade predznak broja s većom apsolutnom vrijednošću. Suma dva suprotna broja jednaka je nuli.

Zbrajanje monoma. Istoimeni monomi zbrajaju se tako da se zbroj njihovih koeficijenata stavi kao koeficijent glavnoj veličini.

Pribrajanje polinoma monomu: $m+(a-b+c)= = m+a+(-b)+c = m+a-b+c$

Zbrajanje običnih razlomaka. Razlomci jednakih nazivnika zbrajaju se tako da se zbroje brojnici, a

nazivnik ostane nepromijenjen. Da se može izvršiti zbrajanje razlomaka nejednakih nazivnika, treba ih najprije svesti na najmanji zajednički nazivnik, a zatim ih zbrojiti kao razlomke jednakih nazivnika. Mješoviti brojevi mogu se zbrajati na dva načina: a) najprije se zbroje cijeli, a zatim razlomci; b) mješoviti brojevi najprije se pretvore u neprave razlomke, svede ih se na zajednički nazivnik, ukoliko nisu istoimeni, i na kraju se izvrši zbrajanje.

Zbrajanje općih razlomaka:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$$

ZLATNI REZ, podjela dužine tako da je njezin veći odsječak srednja geometrijska proporcionala (v. Razmjeri) između cijele dužine i manjeg odsječka. Dijeljenje po zlatnom rezu igra važnu ulogu u estetici. Npr., knjiga ili slika (dužina $= d$, širina $= š$, $d > š$) načinjena je po zlatnom rezu ako je: $(d + š) : d = d : š$.

Teorem: ako je polumjer kružnice podijeljen po zlatnom rezu, onda je njegov veći odsječak jednak stranici pravilnog deseterokuta upisanog u istu kružnicu, tj. $r : s_{10} = s_{10} : (r - s_{10})$ ili $s^2_{10} = r\ (r - s_{10})$, gdje je s_{10} stranica pravilnog deseterokuta, a r polumjer opisane kružnice.

ZNAK SUMACIJE (Σ), simbol za izvjesne sume. Naime, ako neka suma ima veći broj, pa i beskonačno mnogo pribrojnika, koji su istovrsno građeni, tj. dobiju se kao vrijednosti jedne cjelobrojne funkcije f (n) za niz prirodnih vrijednosti brojeva n u određenim granicama, onda se ta suma može kraće

pisati pomoću simbola Σ (početno slovo grčke riječi *sigma)*. Vrijednost *n* za koju se dobiva posljednji član piše se iznad znaka.

ZNAMENKA, simbol za brojeve. U dekadskom sistemu znamenka ima *vlastitu vrijednost* i *mjesnu vrijednost* (v. Sistemi brojeva).

ZRAKA, dio pravca omeđen početnom tačkom na jednoj strani, dok je na suprotnoj strani neomeđen. Zato se može govoriti o snopu zraka sa zajedničkom početnom tačkom. Dvije zrake mogu biti paralelne istosmjerne i paralelne protusmjerne.

Izdavač

NOVINSKO IZDAVAČKO PODUZEĆE »PANORAMA«

Zagreb, Savska c. 92.

Za izdavača

MIA PLEMENČIĆ

Tehnički urednik

EMILIJA RUŽIĆ

Korektor

ZLATA SABO

Tisak i oprema »VJESNIK« ZAGREB